ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

(Σημειώστε ότι αυτές είναι απαντήσεις και όχι απαραίτητα ολοκληρωμένες λύσεις. Ο καθηγητής σας ίσως απαιτεί περισσότερες εξηγήσεις ή δικαιολόγηση, όπως επίσης και μια διαφορετική μορφή για κάποιες από αυτές τις ασκήσεις.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.1

1. α, γ, δ, ε, στ.

3. α. Α   β. Α   γ. Α   δ. Ψ

5. α. Αν υπάρχει επάρκεια νερού, τότε υπάρχει υγιής ανάπτυξη των φυτών.
β. Αν υπάρχουν περαιτέρω τεχνολογικές εξελίξεις, τότε υπάρχει αυξημένη διαθεσιμότητα πληροφοριών.
γ. Αν εμφανίστηκαν σφάλματα, τότε υπήρξε τροποποίηση του προγράμματος.
δ. Αν υπάρχει εξοικονόμηση καυσίμου, τότε υπάρχει καλή μόνωση ή παράθυρα καταιγίδας σε όλο το σπίτι.

7. α. $A \vee B$ β. $A' \wedge B'$

9. α. 1 και 3   β. 2   γ. 4

11. α. Το φαγητό είναι καλό αλλά η εξυπηρέτηση είναι κακή.
β. Το φαγητό είναι κακό και το ίδιο ισχύει για την εξυπηρέτηση.
γ. Είτε το φαγητό είναι κακό ή η εξυπηρέτηση είναι κακή, αλλά η τιμή είναι χαμηλή.
δ. Είτε το φαγητό είναι καλό ή η εξυπηρέτηση είναι εξαιρετική.
ε. Η τιμή είναι υψηλή αλλά είτε το φαγητό είναι κακό ή η εξυπηρέτηση είναι κακή.

13. α. $[A \to B \wedge \Gamma] \wedge (\Gamma' \to B)$
β. $[(A \vee B) \to \Gamma] \wedge (\Gamma \to B)'$
γ. $(A \vee B) \wedge (A \wedge B)'$
δ. $(A \vee B) \to \Gamma$
ε. $A \vee (B \to \Gamma)$

15. α. $A \wedge B$
β. $A \wedge (B \vee \Gamma)$
γ. $B \to (A \wedge \Gamma)$
δ. $A \to (B' \vee \Gamma')$
ε. $A \wedge [\Gamma' \to (B' \vee \Gamma')]$

17. α. Οι βιολέτες είναι μπλε ή η ζάχαρη είναι ξινή.
β. Οι βιολέτες δεν είναι μπλε ή, αν τα τριαντάφυλλα είναι κόκκινα, τότε η ζάχαρη είναι γλυκιά.
γ. Η ζάχαρη είναι γλυκιά και τα τριαντάφυλλα δεν είναι κόκκινα, αν και μόνο αν οι βιολέτες είναι μπλε.
δ. Η ζάχαρη είναι γλυκιά, και τα τριαντάφυλλα δεν είναι κόκκινα αν και μόνο αν οι βιολέτες είναι μπλε.

ε. Αν είναι ψευδές ότι και οι βιολέτες είναι μπλε και η ζάχαρη είναι ξινή, τότε τα τριαντάφυλλα είναι κόκκινα.

στ. Τα τριαντάφυλλα είναι κόκκινα, ή οι βιολέτες είναι μπλε και η ζάχαρη είναι ξινή.

ζ. Τα τριαντάφυλλα είναι κόκκινα ή οι βιολέτες είναι μπλε, και η ζάχαρη είναι ξινή.

19. α. $A \to I$

β. $I \to (A \wedge \Pi)$

γ. $I \to A$

δ. $I \leftrightarrow A$

ε. $(\Pi \vee A) \to I$

21. α. $\Psi \to A$

β. $A \to \Psi$

γ. $A' \to (\Psi' \wedge X)$

δ. $X \to A'$

ε. $X \leftrightarrow \Psi'$

23. α.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{A' \vee B}$	$\boldsymbol{(A \to B) \leftrightarrow A' \vee B}$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Ταυτολογία

β.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{(A \wedge B) \vee \Gamma}$	$\boldsymbol{B \vee \Gamma}$	$\boldsymbol{A \wedge (B \vee \Gamma)}$	$\boldsymbol{(A \wedge B) \vee \Gamma \to A \wedge (B \vee \Gamma)}$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

γ.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{B'}$	$\boldsymbol{A' \vee B'}$	$\boldsymbol{(A' \vee B')'}$	$\boldsymbol{A \wedge (A' \vee B')'}$
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ

δ.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{A \wedge B \to A'}$
Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

ε.

A	B	Γ	$A \to B$	$A \lor \Gamma$	$B \lor \Gamma$	$(A \lor \Gamma) \to (B \lor \Gamma)$	$(A \to B) \to [(A \lor \Gamma) \to (B \lor \Gamma)]$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Ταυτολογία

25. 1β.

A	B	$A \land B$	$B \land A$	$A \land B \leftrightarrow B \land A$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

2α.

A	B	Γ	$A \lor B$	$(A \lor B) \lor \Gamma$	$B \lor \Gamma$	$A \lor (B \lor \Gamma)$	$(A \lor B) \lor \Gamma \leftrightarrow A \lor (B \lor \Gamma)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

2β.

A	B	Γ	$A \land B$	$(A \land B) \land \Gamma$	$B \land \Gamma$	$A \land (B \land \Gamma)$	$(A \land B) \land \Gamma \leftrightarrow A \land (B \land \Gamma)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

3α.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{\Gamma})$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{\Gamma}$	$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{\Gamma})$	$\boldsymbol{A} \vee (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{\Gamma}) \leftrightarrow (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{\Gamma})$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

3β.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{\Gamma})$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{\Gamma}$	$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{\Gamma})$	$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{\Gamma}) \leftrightarrow (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vee (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{\Gamma})$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

4α.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{0} \leftrightarrow \boldsymbol{A}$
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α

5β.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A'} \leftrightarrow \boldsymbol{0}$
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α

27. α. $(A \wedge B') \wedge \Gamma \Leftrightarrow A \wedge (B' \wedge \Gamma)$ από την 2β $\Leftrightarrow \mathrm{A} \wedge (\Gamma \wedge B')$ από την 1β $\Leftrightarrow (A \wedge \Gamma) \wedge B'$ από την 2β.
β. $(A \vee B) \wedge (A \vee B') \Leftrightarrow A \vee (B \wedge B')$ από την 3α $\Leftrightarrow \mathrm{A} \vee 0$ από την 5β $\Leftrightarrow A$ από την 4α.
γ. $A \vee (B \wedge A') \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee A')$ από την 3α $\Leftrightarrow (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge 1$ από την 5α $\Leftrightarrow A \vee B$ από την 4β.

29. Αν ο A είναι ψευδής και αμφότεροι οι B και Γ είναι αληθείς, τότε ο $(A \wedge B) \vee \Gamma$ είναι αληθής αλλά ο $A \wedge (B \vee \Gamma)$ είναι ψευδής. Οι δύο αυτοί ο.σ.τ. δεν είναι ισοδύναμοι.

31. σκυλιά AND NOT ιχνηλάτες

33. (μυθιστορήματα OR έργα) AND AIDS

35. 1,0 , 2,4 , 7,2 , 5,3

37. **αν όχι** (Τιμή1<Τιμή2) **τότε** πρόταση1 **αλλιώς** πρόταση2 **τέλος αν**

39.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \to B}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{A' \vee B}$	$\boldsymbol{A \to B \leftrightarrow A' \vee B}$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

41. α. Εκχωρούμε τις τιμές αληθείας $B' \wedge (A \to B)$ αληθής και A' ψευδής. Από τη δεύτερη εκχώρηση, ο A είναι αληθής. Από την πρώτη εκχώρηση, ο B' είναι αληθής (οπότε ο B είναι ψευδής) και ο $A \to B$ είναι αληθής. Αν ο $A \to B$ είναι αληθής και ο A είναι αληθής, τότε ο B είναι αληθής. Επομένως, ο B είναι και αληθής και ψευδής, οπότε ο $[B' \wedge (A \to B)] \to A'$ είναι ταυτολογία.

β. Εκχωρούμε τις τιμές αληθείας $(A \to B) \wedge A$ αληθής και B ψευδής. Από την πρώτη εκχώρηση, ο A είναι αληθής και ο $A \to B$ είναι αληθής. Αν ο $A \to B$ είναι αληθής και ο A είναι αληθής, τότε ο B είναι αληθής. Επομένως, ο B είναι και αληθής και ψευδής, οπότε ο $[(A \to B) \wedge A] \to B$ είναι ταυτολογία.

γ. Εκχωρούμε τις τιμές αληθείας $(A \vee B) \wedge A'$ αληθής και B ψευδής. Από την πρώτη εκχώρηση, ο A' είναι αληθής (και ο A είναι ψευδής) και ο $A \vee B$ είναι αληθής. Αν ο $A \vee B$ είναι αληθής και ο A είναι ψευδής, τότε ο B είναι αληθής. Επομένως, ο B είναι και αληθής και ψευδής, οπότε ο $(A \vee B) \wedge A' \to B$ είναι ταυτολογία.

43. $2^{2^5} = 2^{32}$

45.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \oplus B}$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

47. α.

A	B	$A \vee B$	A'	B'	$A' \wedge B'$	$(A' \wedge B')'$	$A \vee B \leftrightarrow (A' \wedge B')'$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α

β.

A	B	B'	$A \wedge B'$	$(A \wedge B')'$	$A \to B$	$A \to B \leftrightarrow (A \wedge B')'$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α

49. Ο $A \wedge B$ είναι ισοδύναμος με τον $(A \to B')'$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{B'}$	$\boldsymbol{A \to B'}$	$\boldsymbol{(A \to B')'}$	$\boldsymbol{A \wedge B \leftrightarrow (A \to B')'}$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Ο $A \vee B$ είναι ισοδύναμος με τον $A' \rightarrow B$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{A' \rightarrow B}$	$\boldsymbol{A \vee B \leftrightarrow A' \rightarrow B}$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

51. Ο $A \wedge B$ είναι ισοδύναμος με τον $(A \mid B) \mid (A \mid B)$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{A \mid B}$	$\boldsymbol{(A \mid B) \mid (A \mid B)}$	$\boldsymbol{A \wedge B \leftrightarrow (A \mid B) \mid (A \mid B)}$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Ο A' είναι ισοδύναμος με τον $A \mid A$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A'}$	$\boldsymbol{A \mid A}$	$\boldsymbol{A' \leftrightarrow A \mid A}$
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α

53. α. Προκειμένου ο $A \wedge B$ να είναι αληθής, θα θέλαμε να γνωρίζουμε ότι και τα δύο μέρη είναι αληθή. Αν το ένα μέρος έχει άγνωστη τιμή αληθείας, τότε είναι άγνωστο αν αυτό συμβαίνει. Προκειμένου ο $A \vee B$ να είναι αληθής, θα θέλαμε το ένα τουλάχιστον μέρος να είναι αληθές. Αν το ένα μέρος είναι ψευδές και το άλλο έχει άγνωστη τιμή αληθείας, τότε είναι άγνωστο αν αυτό συμβαίνει. Τέλος, αν η τιμή αληθείας του A είναι άγνωστη, τότε η τιμή αληθείας του A' είναι επίσης άγνωστη.

β. Ν γ. Ψ δ. Α

55. 3^n

57. Η μηχανή Δ είναι είτε καθαρή είτε έχει προσβληθεί. Σε κάθε περίπτωση, από τις προτάσεις 3 και 1, αντίστοιχα, η μηχανή Γ έχει προσβληθεί. Εφόσον η μηχανή Γ έχει προσβληθεί, τότε από την πρόταση 2, η Α έχει προσβληθεί. Από την πρόταση 4, η B έχει προσβληθεί (αφού η Γ δεν είναι καθαρή). Από την πρόταση 3, εφόσον η B έχει προσβληθεί, η Δ δεν είναι καθαρή. Το συμπέρασμα είναι ότι και οι τέσσερις μηχανές έχουν προσβληθεί.

59. Αυτό θα μπορούσε να τους περιλαμβάνει όλους αφού τα μέλη είναι καλοδεχούμενα και τα μη μέλη είναι επίσης καλοδεχούμενα. Ή θα μπορούσε να μην περιλαμβάνει κανέναν επειδή κανένας δεν είναι ταυτόχρονα μέλος και μη μέλος.

61. Αν ο Percival είναι ψεύτης, τότε η πρότασή του είναι ψευδής. Επομένως, είναι ψευδές ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ψεύτης και αμφότεροι οι Percival και Llewellyn πρέπει να λένε την αλήθεια. Αλλά αυτό είναι αδύνατον επειδή υποθέσαμε ότι ο Percival είναι ψεύτης. Επομένως ο Percival λέει την αλήθεια και η πρότασή του είναι αληθής. Εφόσον είπε «τουλάχιστον ένας από μας είναι ψεύτης», ο Llewellyn πρέπει να είναι ψεύτης. Επομένως, ο Percival λέει την αλήθεια και ο Llewellyn είναι ψεύτης.

63. Η πρόταση του Rothwold είναι της μορφής $A \vee B$, όπου η πρόταση A σημαίνει «Είμαι ψεύτης» και η B σημαίνει «Ο Grymlin λέει την αλήθεια». Αν ο Rothwold είναι ψεύτης, τότε η πρότασή του $A \vee B$ είναι ψευδής και η πρόταση $(A \vee B)'$ πρέπει να είναι αληθής. Από τους νόμους του De Morgan, πρέπει αμφότερες οι προτάσεις A' και B' να είναι αληθείς. Όμως η A' είναι η πρόταση ότι ο Rothwold λέει την αλήθεια, η οποία δεν είναι αληθής. Επομένως, ο Rothwold πρέπει να λέει την αλήθεια και η πρότασή του $A \vee B$ είναι αληθής. Ωστόσο, η πρόταση A είναι ψευδής επειδή λέει ότι ο Rothwold είναι ψεύτης. Οπότε η πρόταση B πρέπει να είναι αληθής και ο Grymlin λέει την αλήθεια. Αμφότεροι λένε την αλήθεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

1. Κανόνας διάψευσης (modus tollens).

3. Κανόνας της απλοποίησης.

5. Από τον κανόνα διάψευσης (modus tollens), το συμπέρασμα είναι ότι το αυτοκίνητο δεν είχε εμπλακεί στο ατύχημα.

7. Από τον κανόνα της απλοποίησης, το συμπέρασμα είναι ότι θα πληρωθείτε αύριο.

9.

1. υπόθεση
2. υπόθεση
3. υπόθεση (παραγωγική μέθοδος)
4. 2, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
5. 1, 4, σύζευξη

11.

1. υπόθεση
2. υπόθεση
3. υπόθεση
4. 2, 3, σύζευξη
5. 4, νόμος του De Morgan
6. 1, 5, κανόνας διάψευσης (modus tollens)

13.

1.	$(A \vee B')'$	υπόθεση
2.	$(B \to \Gamma)$	υπόθεση
3.	$A' \wedge (B')'$	νόμος του De Morgan
4.	$A' \wedge B$	3, διπλή άρνηση
5.	A'	4, απλοποίηση
6.	B	4, απλοποίηση
7.	Γ	2, 6, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
8.	$A' \wedge \Gamma$	5, 7, σύζευξη

15.

1.	$A \to B$	υπόθεση
2.	$A \to (B \to \Gamma)$	υπόθεση
3.	A	υπόθεση
4.	B	1, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
5.	$B \to \Gamma$	2, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6.	Γ	4, 5, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

17.

1. A' υπόθεση
2. $A \vee B$ υπόθεση
3. $(A')' \vee B$ 2, διπλή άρνηση
4. $A' \to B$ 3, συνεπαγωγή
5. B 1, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

19. Α

1. $A' \to B'$ υπόθεση
2. B υπόθεση
3. $A \to \Gamma$ υπόθεση
4. $(B')'$ 2, διπλή άρνηση
5. $(A')'$ 1, 4, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
6. A 5, διπλή άρνηση
7. Γ 3, 6, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

21.

1. $A \to (B \to \Gamma)$ υπόθεση
2. B υπόθεση
3. A υπόθεση (χρησιμοποιώντας ξανά την παραγωγική μέθοδο)
4. $B \to \Gamma$ 1, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
5. Γ 2, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

23.

1. $A \to \Gamma$ υπόθεση
2. $\Gamma \to B'$ υπόθεση
3. B υπόθεση
4. $(B')'$ 3, διπλή άρνηση
5. Γ' 2, 4, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
6. A' 1, 5, κανόνας διάψευσης (modus tollens)

ή

1. $A \to \Gamma$ υπόθεση
2. $\Gamma \to B'$ υπόθεση
3. B υπόθεση
4. $A \to B'$ 1, 2, υποθετικός συλλογισμός
5. $(B')'$ 3, διπλή άρνηση
6. A' 4, 5, κανόνας διάψευσης (modus tollens)

25.

1. $P \vee Q$ υπόθεση
2. P' υπόθεση
3. $(P')' \vee Q$ 1, διπλή άρνηση
4. $P' \to Q$ 3, συνεπαγωγή
5. Q 2, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

27.

1. $Q' \to P'$ υπόθεση
2. P υπόθεση
3. $(P')'$ 2, διπλή άρνηση
4. $(Q')'$ 1, 3, κανόνας διάψευσης (modus tollens)

5. Q 4, διπλή άρνηση

29.

1. $P' \to P' \wedge P'$ Άσκηση 28
2. $P' \to (P \vee P)'$ 1, κανόνας De Morgan
3. $[P' \to (P \vee P)'] \to [(P \vee P) \to P]$ Άσκηση 27
4. $(P \vee P) \to P$ 2, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

31.

1. P υπόθεση
2. P' υπόθεση
3. $P \vee Q$ 1, πρόσθεση
4. $Q \vee P$ 3, αντιμεταθετικός κανόνας
5. $(Q')' \vee P$ 4, διπλή άρνηση
6. $Q' \to P$ 5, συνεπαγωγή
7. $(Q')'$ 2, 6, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
8. Q 7, διπλή άρνηση

33. Αποδεικνύουμε τον ο.σ.τ.

$$P \vee (Q \wedge R) \to (P \vee Q)$$

Ξαναγράφοντας το συμπέρασμα, το επιχείρημα είναι

$P \vee (Q \wedge R) \to ((P')' \vee Q)$ από τον κανόνα της διπλής άρνησης

ή

$P \vee (Q \wedge R) \to (P' \to Q)$ από τον κανόνα της συνεπαγωγής

1. $P \vee (Q \wedge R)$ υπόθεση
2. P' υπόθεση
3. $(P')' \vee (Q \wedge R)$ 1, διπλή άρνηση
4. $P' \to (Q \wedge R)$ 3, συνεπαγωγή
5. $Q \wedge R$ 2, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6. Q 5, απλοποίηση

Η απόδειξη του ο.σ.τ.

$$P \vee (Q \wedge R) \to (P \vee R)$$

είναι παρόμοια.

35.

1. $P \to Q$ υπόθεση
2. $P' \to Q$ υπόθεση
3. $Q' \to P'$ 1, αντιθετοαντιστροφή
4. $Q' \to Q$ 2, 3, υποθετικός συλλογισμός
5. $(Q')' \vee Q$ συνεπαγωγή
6. $Q \vee Q$ 5, διπλή άρνηση
7. Q 6, αυτοαναφορά

37.

1. $A' \to B$ υπόθεση
2. $B \to \Gamma$ υπόθεση
3. $\Gamma \to \Delta$ υπόθεση
4. $A' \to \Gamma$ 1, 2, υποθετικός συλλογισμός

5. $A' \to \Delta$ 3, 4, υποθετικός συλλογισμός

39.

1. $Y \to Z'$ υπόθεση
2. $Y \to Z$ υπόθεση
3. Y υπόθεση
4. Z' 1, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
5. Z 2, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6. W 4, 5, ασυνέπεια

41.

1. $(A \wedge B)'$ υπόθεση
2. $(\Gamma' \wedge A)'$ υπόθεση
3. $(\Gamma \wedge B')'$ υπόθεση
4. $A' \vee B'$ 1, κανόνας De Morgan
5. $B' \vee A'$ 4, αντιμεταθετικός κανόνας
6. $B \to A'$ 5, συνεπαγωγή
7. $(\Gamma')' \vee A'$ 2, κανόνας De Morgan
8. $\Gamma' \to A'$ 7, συνεπαγωγή
9. $\Gamma' \vee (B')'$ 3, κανόνας De Morgan
10. $(B')' \vee \Gamma'$ 9, αντιμεταθετικός κανόνας
11. $B' \to \Gamma'$ 10, συνεπαγωγή
12. $B' \to A'$ 8, 11, υποθετικός συλλογισμός
13. $(B \to A') \wedge (B' \to A')$ 6, 12, σύζευξη
14. A' Άσκηση 35

43. Το επιχείρημα είναι $(A \to \Gamma) \wedge (A \vee \Sigma) \wedge \Gamma' \to \Sigma$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $A \to \Gamma$ υπόθεση
2. $A \vee \Sigma$ υπόθεση
3. Γ' υπόθεση
4. $\Gamma' \to A'$ 1, αντιθετοαντιστροφή
5. A' 3, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6. $(A')' \vee \Sigma$ 2, διπλή άρνηση
7. $A' \to \Sigma$ 6, συνεπαγωγή
8. Σ 5, 7, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

45. Το επιχείρημα είναι

$$(K \to \Psi') \wedge (\Psi \vee \Sigma) \to (K \to \Sigma)$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $K \to \Psi'$ υπόθεση
2. $\Psi \vee \Sigma$ υπόθεση
3. K υπόθεση
4. Ψ' 1, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
5. Σ 2, 4, διαζευκτικός συλλογισμός

47. Το επιχείρημα είναι

$$[(\Delta \to \Pi) \wedge (\Delta \vee K) \wedge \Pi'] \to K$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $\Delta \to \Pi$ υπόθεση
2. $\Delta \vee K$ υπόθεση

3. Π' υπόθεση
4. Δ' 1, 3, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
5. K 2, 4, διαζευκτικός συλλογισμός

49. Το επιχείρημα είναι

$$\left[\left(P \wedge (\Gamma' \vee N)\right) \wedge N' \wedge (\Sigma' \rightarrow \Gamma)\right] \rightarrow (\Sigma \wedge P)$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $P \wedge (\Gamma' \vee N)$ υπόθεση
2. N' υπόθεση
3. $\Sigma' \rightarrow \Gamma$ υπόθεση
4. P 1, απλοποίηση
5. $\Gamma' \vee N$ 1, απλοποίηση
6. $N \vee \Gamma'$ 5, αντιμεταθετικός κανόνας
7. Γ' 2, 6, διαζευκτικός συλλογισμός
8. $\Gamma' \rightarrow (\Sigma')'$ 3, αντιθετοαντιστροφή
9. $(\Sigma')'$ 7, 8, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
10. Σ 9, διπλή άρνηση
11. $\Sigma \wedge P$ 4, 10, σύζευξη

51. Το επιχείρημα είναι

$$\left[\left((K \vee \Psi) \rightarrow E\right) \wedge \Pi' \wedge (E \rightarrow \Pi)\right] \rightarrow K'$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $(K \vee \Psi) \rightarrow E$ υπόθεση
2. Π' υπόθεση
3. $E \rightarrow \Pi$ υπόθεση
4. $\Pi' \rightarrow E'$ 3, αντιθετοαντιστροφή
5. E' 2, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6. $E' \rightarrow (K \vee \Psi)'$ 1, αντιθετοαντιστροφή
7. $(K \vee \Psi)'$ 5, 6, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
8. $K' \wedge \Psi'$ 7, κανόνας De Morgan
9. K' 8, απλοποίηση

ή

1. $(K \vee \Psi) \rightarrow E$ υπόθεση
2. Π' υπόθεση
3. $E \rightarrow \Pi$ υπόθεση
4. E' 2, 3, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
5. $(K \vee \Psi)'$ 1, 4, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
6. $K' \wedge \Psi'$ 5, κανόνας De Morgan
7. K' 6, απλοποίηση

53. Το επιχείρημα είναι

$$(\Delta \rightarrow \Phi) \wedge (\Delta \vee N) \rightarrow (\Phi' \rightarrow N)$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $\Delta \rightarrow \Phi$ υπόθεση
2. $\Delta \vee N$ υπόθεση
3. Φ' υπόθεση
4. Δ' 1, 3, κανόνας διάψευσης (modus tollens)

5. N 2, 4, διαζευκτικός συλλογισμός

55. α.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{B \to \Gamma}$	$\boldsymbol{A \to (B \to \Gamma)}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$	$\boldsymbol{(A \wedge B) \to \Gamma}$	$\boldsymbol{A \to (B \to \Gamma) \leftrightarrow (A \wedge B) \to \Gamma}$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

β.

$$A \to (B \to \Gamma) \Leftrightarrow A \to (B' \vee \Gamma) \Leftrightarrow A' \vee (B' \vee \Gamma) \Leftrightarrow (A' \vee B') \vee \Gamma \Leftrightarrow (A \wedge B)' \vee \Gamma \Leftrightarrow (A \wedge B) \to \Gamma$$

γ. Από το ερώτημα (α) (ή το ερώτημα (β)),

$$[P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n] \to (R \to S) \Leftrightarrow (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge R) \to S$$

το οποίο μας λέει να πάρουμε κάθε μία από τις προτάσεις $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ ως υποθέσεις και να συμπεράνουμε την S.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.3

1. α. Α β. Ψ γ. Ψ δ. Α

3. α. Α β. Α γ. Α δ. Ψ ε. Ψ στ. Α ζ. Α η. Ψ

5. α. Ψ β. Α γ. Α δ. Ψ ε. Α στ. Α

7. α. αληθής: το πεδίο της ερμηνείας είναι οι ακέραιοι, $A(x)$ είναι «ο x είναι άρτιος», $B(x)$ είναι «ο x είναι περιττός».
ψευδής: το πεδίο της ερμηνείας είναι οι θετικοί ακέραιοι, $A(x)$ είναι «$x > 0$», $B(x)$ είναι «$x \geq 1$».
β. αληθής: το πεδίο της ερμηνείας είναι το σύνολο των ευθειών στο επίπεδο, $P(x, y)$ είναι «η x είναι παράλληλη με την y».
ψευδής: το πεδίο της ερμηνείας είναι οι ακέραιοι, $P(x, y)$ είναι «$x < y$».
γ. αληθής: το πεδίο της ερμηνείας είναι οι ακέραιοι, $P(x)$ είναι «ο x είναι άρτιος», $Q(x, y)$ είναι «$y \mid x$» (ο y διαιρεί τον x).
ψευδής: το πεδίο της ερμηνείας είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων, $P(x)$ είναι «ο x είναι άνδρας», $Q(x, y)$ είναι «ο y είναι αδερφός του x».

9. α. Η εμβέλεια του $(\forall x)$ είναι $P(x) \to Q(y)$, η y είναι ελεύθερη μεταβλητή.
β. Η εμβέλεια του $(\exists x)$ είναι $A(x) \wedge (\forall y)B(y)$, η εμβέλεια του $(\forall y)$ είναι $B(y)$, δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.
γ. Η εμβέλεια του $(\exists x)$ είναι $(\forall y)P(x, y) \wedge Q(x, y)$, η εμβέλεια του $(\forall y)$ είναι $P(x, y)$, η y είναι ελεύθερη μεταβλητή.
δ. Η εμβέλεια του $(\exists x)$ είναι $(\exists y)[A(x, y) \wedge B(y, z) \to A(a, z)]$, η εμβέλεια του $(\exists y)$ είναι $A(x, y) \wedge B(y, z) \to A(a, z)$, η z είναι ελεύθερη μεταβλητή.

11. Η β και η γ.

Πολλά από τα ερωτήματα των ασκήσεων 13 – 24 έχουν πολλαπλές ισοδύναμες απαντήσεις, μερικές από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

13. α. $(\forall x)[M(x) \to H(x)]$

β. $(\exists x)\left[M(x) \wedge \left(B(x)\right)'\right]$ ή $\left[(\forall x)\left(M(x) \to B(x)\right)\right]'$

γ. $(\forall x)\left[M(x) \wedge H(x) \to \left(B(x)\right)'\right]$

δ. $(\exists x)[M(x) \wedge H(x) \wedge B(x)]$

ε. $(\forall x)\left[M(x) \to \left(H(x) \wedge B(x)\right)'\right]$

στ. $(\forall x)[M(x) \wedge H(x) \to M(x) \wedge B(x)]$

ζ. $(\forall x)\left[M(x) \to \left(H(x)\right)'\right]$

η. $H(\Delta) \to (\forall x)\left(M(x) \to H(x)\right)$

θ. $B(\Delta) \wedge B(T)$

ι. $(\exists x)\left(M(x) \wedge B(x)\right) \to (\forall x)\left(M(x) \to H(x)\right)$

15. α. $(\forall x)[A(x) \to \Psi(x)]$

β. $(\exists x)[\Gamma(x) \wedge \Psi(x)]$

γ. $(\forall x)\left(A(x) \to \Psi(x)\right) \wedge (\forall x)(\Gamma(x) \to [\Psi(x)]')$

δ. $(\forall x)\left(\Psi(x) \to \Gamma(x)\right)$

ε. $(\forall x)\left[A(x) \to \left(\Psi(x)\right)'\right]$

στ. $(\forall x)\left(A(x) \to \Psi(x)\right) \to (\forall x)\left(\Gamma(x) \to \Psi(x)\right)$

ζ. $(\exists x)\left[\Gamma(x) \wedge \left(\Psi(x)\right)'\right]$

η. $(\forall x)\left[A(x) \to \left(\Psi(x)\right)'\right] \to (\exists x)\left[\Gamma(x) \wedge \left(\Psi(x)\right)'\right]$

17. α. $(\exists x)\left[A(x) \wedge (\forall y)\left(\Sigma(y) \to \Xi(x,y)\right)\right]$

β. $(\forall x)\left[A(x) \to (\exists y)\left(\Sigma(y) \wedge \Xi(x,y)\right)\right]$

γ. $(\exists x)(\exists y)\left(A(x) \wedge \Sigma(y) \wedge \left(\Xi(x,y)\right)'\right)$

19. α. $(\forall x)(\forall y)\left(T(x) \wedge A(y) \to \Delta(x,y)\right)$

β. $\left[(\exists x)\left(A(x) \wedge (\forall y)\left(T(y) \to \Delta(x,y)\right)\right)\right]'$ ή $(\forall x)\left(A(x) \to (\exists y)(T(y) \wedge [\Delta(x,y)]')\right)$

γ. $(\forall x)(\forall y)\left(T(y) \wedge \Delta(x,y) \to A(x)\right)$

δ. $(\forall x)\left(A(x) \to (\exists y)\left(T(y) \wedge \Delta(x,y)\right)\right)$ ή $(\forall x)(\exists y)\left(A(x) \to \left(T(y) \wedge \Delta(x,y)\right)\right)$

21. α. $(\exists x)\left(\Gamma(x) \wedge \Delta(x) \wedge X(x)\right)$

β. $(\forall x)\left[\Gamma(x) \to \left(\Delta(x) \wedge X(x)\right)'\right]$

γ. $(\exists x)\left[\Delta(x) \wedge (\forall y)\left(\Theta(x,y) \to K(y)\right)\right]$ ή $(\exists x)(\forall y)\left[\Delta(x) \wedge \left(\Theta(x,y) \to K(y)\right)\right]$

δ. $(\forall x)\left[K(x) \to (\forall y)\left(\Theta(x,y) \to K(y)\right)\right]$ ή $(\forall x)(\forall y)\left[K(x) \to \left(\Theta(x,y) \to K(y)\right)\right]$ ή $(\forall x)(\forall y)[K(x) \wedge \Theta(x,y) \to K(y)]$

ε. $(\forall x)(\forall y)\left[\left(K(y) \wedge \Theta(x,y)\right) \to K(x)\right]$

στ. $(\forall x)([\Gamma(x) \wedge \Delta(x)] \to (\exists y)[K(y) \wedge \Theta(x,y)])$ ή $(\forall x)(\exists y)([\Gamma(x) \wedge \Delta(x)] \to [K(y) \wedge \Theta(x,y)])$

ζ. $(\exists x)\left(\Gamma(x) \wedge (\forall y)\left[\Delta(y) \to \left(\Theta(x,y)\right)'\right]\right)$ ή $(\exists x)\left(\Gamma(x) \wedge (\forall y)\left[\Theta(x,y) \to \left(\Delta(y)\right)'\right]\right)$ ή $(\exists x)(\forall y)\left(\Gamma(x) \wedge \left[\Delta(y) \to \left(\Theta(x,y)\right)'\right]\right)$

23. α. $(\forall x)\big[M(x) \to (\forall y)\big(\Lambda(y) \to A(x,y)\big)\big]$ ή $(\forall x)(\forall(y)\big[\big(M(x) \wedge \Lambda(y)\big) \to A(x,y)\big]$

β. $(\exists x)\big[M(x) \wedge (\forall y)\big(\Lambda(y) \to A(x,y)\big)\big]$

γ. $(\forall x)\big[M(x) \to (\exists y)\big(\Lambda(y) \wedge A(x,y)\big)\big]$

δ. $(\forall x)\left[M(x) \to (\forall y)\left(\big(A(x,y)\big)' \to \Lambda(y)\right)\right]$

ε. $(\forall y)\big[\Lambda(y) \to (\forall x)\big(A(x,y) \to M(x)\big)\big]$ ή $(\forall y)(\forall x)\big[\big(\Lambda(y) \wedge A(x,y)\big) \to M(x)\big]$

στ. $(\forall x)\left[M(x) \to \Big((\forall y)\big(A(x,y) \to \Lambda(y)\big)\Big)\right]$

ζ. $\left[(\exists x)\big[M(x) \wedge (\forall y)\big(A(x,y) \to \Lambda(y)\big)\big]\right]'$ ή $(\forall x)\left[M(x) \to (\exists y)\left(A(x,y) \wedge \big(\Lambda(y)\big)'\right)\right]$

η. $(\exists x)\big[M(x) \wedge (\exists y)\big(\Lambda(y) \wedge A(x,y)\big)\big]$ ή $(\exists x)(\exists y)[M(x) \wedge \Lambda(y) \wedge A(x,y)]$

θ. $(\exists x)\big[M(x) \wedge (\forall y)\big(A(x,y) \to \Lambda(y)\big)\big]$

ι. $(\forall x)\left[M(x) \to (\exists y)\left(\Lambda(y) \wedge \big(A(x,y)\big)'\right)\right]$

κ. $(\forall x)\left[M(x) \to (\forall y)\left(\Lambda(y) \to \big(A(x,y)\big)'\right)\right]$ ή $(\forall x)(\forall y)\left[\big(M(x) \wedge \Lambda(y)\big) \to \big(A(x,y)\big)'\right]$

λ. $\left[(\exists x)\left[M(x) \wedge (\forall y)\left(\Lambda(y) \to \big(A(x,y)\big)'\right)\right]\right]'$ ή $(\forall x)\big[M(x) \to (\exists y)\big(\Lambda(y) \wedge A(x,y)\big)\big]$

25. α. Ο Γιάννης είναι όμορφος και η Κατερίνα αγαπάει τον Γιάννη.

β. Όλοι οι άνδρες είναι όμορφοι.

γ. Όλες οι γυναίκες αγαπούν μόνο όμορφους άνδρες.

δ. Ένας όμορφος άνδρας αγαπάει την Κατερίνα.

ε. Κάποια όμορφη γυναίκα αγαπάει μόνο όμορφους άνδρες.

στ. Ο Γιάννης αγαπάει όλες τις όμορφες γυναίκες.

27. α. 2 β. 3 γ. 3 δ. 1

29. α. Καμία ιστοσελίδα δεν διαθέτει ήχο.

β. Κάποια ιστοσελίδα δεν διαθέτει ήχο ή δεν διαθέτει βίντεο.

γ. Κάποια ιστοσελίδα δεν διαθέτει ούτε ήχο ούτε βίντεο.

δ. Κάθε ιστοσελίδα διαθέτει είτε ήχο είτε βίντεο.

ε. Κάποια ιστοσελίδα δεν διαθέτει κείμενο και επίσης είτε δεν διαθέτει ήχο είτε δεν διαθέτει βίντεο.

31. α. Κάποιος αγρότης καλλιεργεί κάτι εκτός από καλαμπόκι.

β. Κάποιος αγρότης δεν καλλιεργεί καλαμπόκι.

γ. Κάποιος που δεν είναι αγρότης καλλιεργεί καλαμπόκι.

33. α. Και τα δύο μέλη είναι αληθή ακριβώς όταν το $A(x,y)$ ισχύει για όλα τα ζεύγη x, y.

β. Και τα δύο μέλη είναι αληθή ακριβώς όταν κάποιο ζεύγος x, y ικανοποιεί την ιδιότητα $A(x,y)$.

γ. Αν υπάρχει ένα x το οποίο είναι σε σχέση P με όλα τα y, τότε για όλα τα y υπάρχει ένα x (το ίδιο x) που είναι σε σχέση P με το y.

δ. Αν το a έχει την ιδιότητα A, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο στο πεδίο της ερμηνείας που έχει την ιδιότητα A.

ε. Αν κάθε στοιχείο του πεδίου της ερμηνείας που έχει την ιδιότητα A έχει επίσης την ιδιότητα B, τότε αν όλα τα στοιχεία του πεδίου της ερμηνείας έχουν την ιδιότητα A, όλα έχουν την ιδιότητα B.

35. α. Έγκυρος: το ότι υπάρχει ένα x στο πεδίο της ερμηνείας με την ιδιότητα A μας λέει ότι είναι ψευδές πως οτιδήποτε στο πεδίο της ερμηνείας αποτυγχάνει να έχει την ιδιότητα A.

β. Όχι έγκυρος: το πεδίο της ερμηνείας είναι οι ακέραιοι, $P(x)$ είναι «ο x είναι άρτιος», $Q(x)$ είναι «ο x είναι πρώτος». Εφόσον υπάρχουν πρώτοι ακέραιοι αριθμοί, $(\exists x)Q(x)$ και συνεπώς το $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ είναι αληθές. Όμως είναι ψευδές ότι κάθε ακέραιος είναι άρτιος ή πρώτος, οπότε η συνεπαγωγή είναι ψευδής.

37. Αν κάποιο στοιχείο του πεδίου της ερμηνείας έχει είτε την ιδιότητα P είτε την ιδιότητα Q, τότε κάποιο στοιχείο έχει την ιδιότητα P ή κάποιο στοιχείο έχει την ιδιότητα Q, και αντιστρόφως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.4

1. Το συμπέρασμα είναι ότι οι πανσέδες είναι λουλούδια. Οι υποθέσεις είναι της μορφής $(\forall x)\big(F(x) \to P(x)\big) \wedge F(p)$. Από τον καθολικό προσδιορισμό, $F(p) \to P(p)$ και έπειτα από τον κανόνα απόσπασης (modus ponens), $P(p)$.

3. Το συμπέρασμα είναι ότι οι πανσέδες είναι κόκκινοι. Οι υποθέσεις είναι της μορφής $(\forall x)\big[F(x) \to \big(R(x) \vee P(x)\big)\big] \wedge F(p) \wedge [P(p)]'$. Από τον καθολικό προσδιορισμό, $F(p) \to \big(R(p) \vee P(p)\big)$, έπειτα από τον κανόνα απόσπασης (modus ponens), $R(p) \vee P(p)$ και τέλος από τον διαζευκτικό συλλογισμό, $R(p)$.

5. Δεν είναι δυνατόν να εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα. Το γεγονός ότι οι πανσέδες είναι λουλούδια, δεν τους κάνει είτε κόκκινους είναι μωβ. Οι υποθέσεις είναι της μορφής $(\exists x)\big(F(x) \wedge R(x)\big)$, $(\exists x)\big(F(x) \wedge P(x)\big)$, $F(p)$. Όμως ο υπαρξιακός προσδιορισμός δεν μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το p αφαιρώντας τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες, οπότε δεν μπορούμε να πούμε τίποτα περισσότερο σχετικά με τους πανσέδες.

7.

1. υπόθεση
2. 1, υπαρξιακός προσδιορισμός
3. υπόθεση
4. 3, καθολικός προσδιορισμός
5. 2, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6. 5, υπαρξιακή γενίκευση

9. α. Το πεδίο της ερμηνείας είναι το σύνολο των ακέραιων, $P(x,y)$ είναι «$x < y$» και $Q(x,y)$ είναι «$x > y$». Για κάθε ακέραιο x, υπάρχει κάποιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος και υπάρχει κάποιος ακέραιος που είναι μικρότερος. Όμως είναι ψευδές ότι για κάθε ακέραιο x υπάρχει κάποιος (ένας) ακέραιος που είναι και μικρότερος και μεγαλύτερος από τον x.

β. Για να πάμε στο βήμα 2, εφαρμόσαμε υπαρξιακό προσδιορισμό σε δύο διαφορετικούς υπαρξιακούς ποσοδείκτες, κανένας από τους οποίους δεν ήταν μπροστά από ολόκληρο το υπόλοιπο του ο.σ.τ. που ήταν η εμβέλειά του. Επίσης, αμφότεροι οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες αφαιρέθηκαν με τη μία και η μεταβλητή σε κάθε περίπτωση αντικαταστάθηκε από την ίδια σταθερά a. Αυτό θα έπρεπε να γίνει σε δύο βήματα και στο δεύτερο βήμα θα έπρεπε να εισάγουμε μια νέα σταθερά που δεν θα είχε χρησιμοποιηθεί νωρίτερα στην απόδειξη. Ακόμα, στο βήμα 3 ο υπαρξιακός ποσοδείκτης δεν εισήχθη μπροστά από τον ο.σ.τ.

11.

1. $(\forall x)P(x)$ υπόθεση
2. $P(x)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
3. $P(x) \vee Q(x)$ 2, πρόσθεση
4. $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ 3, καθολική γενίκευση (παρατηρήστε ότι ο $P(x) \vee Q(x)$ προέκυψε από τον $(\forall x)P(x)$ στον οποίο η x δεν ήταν ελεύθερη μεταβλητή.)

13.

1. $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ υπόθεση
2. $(\exists y)P(a,y)$ 1, υπαρξιακός προσδιορισμός
3. $P(a,b)$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $(\exists x)P(x,b)$ 3, υπαρξιακή γενίκευση
5. $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$ 4, υπαρξιακή γενίκευση

15.

1. $(\forall x)P(x)$ υπόθεση
2. $(\exists x)[P(x)]'$ υπόθεση
3. $[P(a)]'$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $P(a)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
5. $Q(a)$ 3, 4, ασυνέπεια
6. $(\exists x)Q(x)$ 5, υπαρξιακή γενίκευση

17.

1. $(\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$ υπόθεση
2. $A(a) \wedge B(a)$ 1, υπαρξιακός προσδιορισμός
3. $A(a)$ 2, απλοποίηση
4. $B(a)$ 2, απλοποίηση
5. $(\exists x)A(x)$ 3, υπαρξιακή γενίκευση
6. $(\exists x)B(x)$ 4, υπαρξιακή γενίκευση
7. $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 5, 6, σύζευξη

19. Το πεδίο της ερμηνείας είναι οι ακέραιοι, $P(x)$ είναι «ο x είναι άρτιος», $Q(x,y)$ είναι «$x = 2y+1$» (το οποίο σημαίνει ότι ο x είναι περιττός). Τότε ο ο.σ.τ. $(\exists x)P(x)$ είναι αληθής ($x = 2$) και ο ο.σ.τ. $(\exists x)(\exists y)Q(x,y)$ είναι αληθής ($3 = 2 \cdot 1 + 1$), αλλά ο ο.σ.τ. $(\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(x,y)]$ είναι ψευδής (κανένας αριθμός x δεν είναι και άρτιος και περιττός).

21.

1. $(\forall x)\big(P(x)\big)'$ υπόθεση
2. $\big(P(x)\big)'$ 1, καθολικός προσδιορισμός
3. $P(x)$ προσωρινή υπόθεση
4. $Q(x)$ 2, 3, ασυνέπεια
5. $P(x) \to Q(x)$ αποδέσμευση προσωρινής υπόθεσης
6. $(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big)$ 5, καθολική γενίκευση

23.

1. $(\exists x)(\forall y)Q(x,y)$ υπόθεση
2. $(\forall y)Q(a,y)$ 1, υπαρξιακός προσδιορισμός
3. $Q(a,y)$ 2, καθολικός προσδιορισμός
4. $(\exists x)Q(x,y)$ 3, υπαρξιακή γενίκευση
5. $(\forall y)(\exists x)Q(x,y)$ 4, καθολική γενίκευση

25.

1. $(\forall x)\big(A(x) \to B(x)\big)$ υπόθεση
2. $(\exists x)A(x)$ υπόθεση
3. $A(a)$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $A(a) \to B(a)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
5. $B(a)$ 3, 4, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
6. $(\exists x)B(x)$ 5, υπαρξιακή γενίκευση

27.

1. $P(x) \to (\exists y)Q(x,y)$ υπόθεση
2. $P(x)$ προσωρινή υπόθεση
3. $(\exists y)Q(x,y)$ 1, 2, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
4. $Q(x,a)$ 3, υπαρξιακός προσδιορισμός
5. $P(x) \to Q(x,a)$ αποδέσμευση προσωρινής υπόθεσης
6. $(\exists y)\big(P(x) \to Q(x,y)\big)$ 5, υπαρξιακή γενίκευση

29.

1. $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$ υπόθεση
2. $(\forall y)[Q(y) \to R(y)]$ υπόθεση
3. $P(a) \wedge Q(a)$ 1, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $P(a)$ 3, απλοποίηση
5. $Q(a)$ 3, απλοποίηση
6. $Q(a) \to R(a)$ 2, καθολικός προσδιορισμός
7. $R(a)$ 5, 6, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
8. $P(a) \wedge R(a)$ 4, 7, σύζευξη
9. $(\exists x)[P(x) \wedge R(x)]$ 8, υπαρξιακή γενίκευση

31. α. $(\forall x)\big(M(x) \to P(x)\big) \wedge (\forall x)\big(S(x) \to M(x)\big) \to (\forall x)\big(S(x) \to P(x)\big)$

1. $(\forall x)\big(M(x) \to P(x)\big)$ υπόθεση
2. $(\forall x)\big(S(x) \to M(x)\big)$ υπόθεση
3. $M(x) \to P(x)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
4. $S(x) \to M(x)$ 2, καθολικός προσδιορισμός
5. $S(x) \to P(x)$ 3, 4, υποθετικός συλλογισμός
6. $(\forall x)\big(S(x) \to P(x)\big)$ 5, καθολική γενίκευση

β. $(\forall x)(M(x) \to [P(x)]') \wedge (\forall x)\big(S(x) \to M(x)\big) \to (\forall x)(S(x) \to [P(x)]')$

1. $(\forall x)(M(x) \to [P(x)]')$ υπόθεση
2. $(\forall x)\big(S(x) \to M(x)\big)$ υπόθεση
3. $M(x) \to [P(x)]'$ 1, καθολικός προσδιορισμός
4. $S(x) \to M(x)$ 2, καθολικός προσδιορισμός
5. $S(x) \to [P(x)]'$ 3, 4, υποθετικός συλλογισμός
6. $(\forall x)(S(x) \to [P(x)]')$ 5, καθολική γενίκευση

γ. $(\forall x)\big(M(x) \to P(x)\big) \wedge (\exists x)\big(S(x) \wedge M(x)\big) \to (\exists x)\big(S(x) \wedge P(x)\big)$

1. $(\forall x)\big(M(x) \to P(x)\big)$ υπόθεση
2. $(\exists x)\big(S(x) \wedge M(x)\big)$ υπόθεση
3. $S(a) \wedge M(a)$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $M(a)$ 3, απλοποίηση
5. $M(a) \to P(a)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
6. $P(a)$ 4, 5, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

7. $S(a)$ 3, απλοποίηση
8. $S(a) \wedge P(a)$ 6, 7, σύζευξη
9. $(\exists x)\big(S(x) \wedge P(x)\big)$ 8, υπαρξιακή γενίκευση

δ. $(\forall x)(M(x) \to [P(x)]') \to (\exists x)\big(S(x) \wedge M(x)\big) \to (\exists x)(S(x) \wedge [P(x)]')$

1. $(\forall x)(M(x) \to [P(x)]')$ υπόθεση
2. $(\exists x)\big(S(x) \wedge M(x)\big)$ υπόθεση
3. $S(a) \wedge M(a)$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $M(a) \to [P(a)]'$ 3, απλοποίηση
5. $M(a)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
6. $[P(a)]'$ 4, 5, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
7. $S(a)$ 3, απλοποίηση
8. $S(a) \wedge [P(a)]'$ 6, 7, σύζευξη
9. $(\exists x)(S(x) \wedge [P(x)]')$ 8, υπαρξιακή γενίκευση

33. Το επιχείρημα είναι

$$(\forall x)(\forall y)[K(x) \wedge A(y) \to M(x,y)] \wedge K(s) \wedge (\exists x)(\Phi(x) \wedge [M(s,x)]') \to (\exists x)[A(x)]'$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $(\forall x)(\forall y)[K(x) \wedge A(y) \to M(x,y)]$ υπόθεση
2. $K(s)$ υπόθεση
3. $(\forall y)[K(s) \wedge A(y) \to M(s,y)]$ 1, καθολικός προσδιορισμός
4. $(\exists x)(\Phi(x) \wedge [M(s,x)]')$ υπόθεση
5. $S(a) \wedge [M(s,x)]'$ 4, υπαρξιακός προσδιορισμός
6. $K(s) \wedge A(a) \to M(s,a)$ 3, καθολικός προσδιορισμός
7. $[M(s,x)]'$ 5, απλοποίηση
8. $[K(s) \wedge A(a)]'$ 6, 7, κανόνας διάψευσης (modus tollens)
9. $[K(s)]' \vee [A(a)]'$ 8, κανόνας De Morgan
10. $[[K(s)]']'$ 2, διπλή άρνηση
11. $[A(a)]'$ 9, 10, διαζευκτικός συλλογισμός
12. $(\exists x)[A(x)]'$ 11, υπαρξιακή γενίκευση

35. Το επιχείρημα είναι

$$(\forall x)\big(E(x) \to B(x) \vee K(x)\big) \wedge (\forall x)\big(K(x) \wedge N(x) \to Y(x)\big) \wedge \big(B(\gamma)\big)' \wedge N(\gamma)$$
$$\to \big[\big(E(\gamma) \to Y(\gamma)\big)\big]$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $(\forall x)\big(E(x) \to B(x) \vee K(x)\big)$ υπόθεση
2. $(\forall x)\big(K(x) \wedge N(x) \to Y(x)\big)$ υπόθεση
3. $E(\gamma) \to B(\gamma) \vee K(\gamma)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
4. $K(\gamma) \wedge N(\gamma) \to Y(\gamma)$ 2, καθολικός προσδιορισμός
5. $E(\gamma)$ υπόθεση
6. $B(\gamma) \vee K(\gamma)$ 3, 5, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
7. $\big(B(\gamma)\big)'$ υπόθεση
8. $K(\gamma)$ 6, 7, διαζευκτικός συλλογισμός
9. $N(\gamma)$ υπόθεση
10. $K(\gamma) \wedge N(\gamma)$ 8, 9, σύζευξη
11. $Y(\gamma)$ 4, 10, κανόνας απόσπασης (modus ponens)

37. Το επιχείρημα είναι

$$(\forall x)\big(K(x) \to \Phi(x)\big) \wedge (\exists x)\big(K(x) \wedge M(x)\big) \wedge (\forall x)\left(\big(\Pi(x)\big)' \to \big(M(x)\big)'\right)$$
$$\to (\exists x)\big(\Pi(x) \wedge \Phi(x)\big)$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $(\forall x)\big(K(x) \to \Phi(x)\big)$ υπόθεση
2. $(\exists x)\big(K(x) \wedge M(x)\big)$ υπόθεση
3. $(\forall x)\left(\big(\Pi(x)\big)' \to \big(M(x)\big)'\right)$ υπόθεση
4. $K(a) \wedge M(a)$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
5. $K(a) \to \Phi(a)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
6. $K(a)$ 4, απλοποίηση
7. $M(a)$ 4, απλοποίηση
8. $\Phi(a)$ 5, 6, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
9. $\big(\Pi(a)\big)' \to \big(M(a)\big)'$ 3, καθολικός προσδιορισμός
10. $M(a) \to \Pi(a)$ 9, αντιθετοαντιστροφή
11. $\Pi(a)$ 7, 10, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
12. $\Pi(a) \wedge \Phi(a)$ 8, 11, σύζευξη
13. $(\exists x)\big(\Pi(x) \wedge \Phi(x)\big)$ 12, υπαρξιακή γενίκευση

39. Το επιχείρημα είναι

$$(\forall x)\big(Y(x) \to (\exists y)\Delta(x,y)\big) \wedge (\forall x)(\forall y)\big(\Delta(x,y) \to K(x,y)\big) \wedge Y(\mu) \to (\exists y)K(\mu,y)$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $(\forall x)\big(Y(x) \to (\exists y)\Delta(x,y)\big)$ υπόθεση
2. $Y(\mu) \to (\exists y)\Delta(\mu,y)$ 1, καθολικός προσδιορισμός
3. $Y(\mu)$ υπόθεση
4. $(\exists y)\Delta(\mu,y)$ 2, 3, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
5. $(\forall x)(\forall y)\big(\Delta(x,y) \to K(x,y)\big)$ υπόθεση
6. $(\forall y)\big(\Delta(\mu,y) \to K(\mu,y)\big)$ 5, καθολικός προσδιορισμός
7. $\Delta(\mu,a)$ 4, υπαρξιακός προσδιορισμός
8. $\Delta(\mu,a) \to K(\mu,a)$ 6, καθολικός προσδιορισμός
9. $K(\mu,a)$ 7, 8, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
10. $(\exists y)K(\mu,y)$ 9, υπαρξιακή γενίκευση

41. Το επιχείρημα είναι

$$(\exists x)\left(E(x) \wedge (\forall y)\big(\Pi(y) \to \Phi(x,y)\big)\right) \wedge (\exists x)\big(\Pi(x) \wedge M(x)\big)$$
$$\to (\exists x)\left(E(x) \wedge (\exists y)\big(M(y) \wedge \Phi(x,y)\big)\right)$$

Μια αποδεικτική ακολουθία είναι

1. $(\exists x)\left(E(x) \wedge (\forall y)\big(\Pi(y) \to \Phi(x,y)\big)\right)$ υπόθεση
2. $(\exists x)\big(\Pi(x) \wedge M(x)\big)$ υπόθεση
3. $E(a) \wedge (\forall y)\big(\Pi(y) \to \Phi(a,y)\big)$ 1, υπαρξιακός προσδιορισμός
4. $(\forall y)\big(\Pi(y) \to \Phi(a,y)\big)$ 3, απλοποίηση
5. $\Pi(b) \wedge M(b)$ 2, υπαρξιακός προσδιορισμός
6. $\Pi(b) \to \Phi(a,b)$ 4, καθολικός προσδιορισμός
7. $\Pi(b)$ 5, απλοποίηση

8. $\Phi(a,b)$ — 6, 7, κανόνας απόσπασης (modus ponens)
9. $M(b)$ — 5, απλοποίηση
10. $M(b) \wedge \Phi(a,b)$ — 8, 9, σύζευξη
11. $(\exists y)\big(M(y) \wedge \Phi(a,y)\big)$ — 10, υπαρξιακή γενίκευση
12. $E(a)$ — 3, απλοποίηση
13. $E(a) \wedge (\exists y)\big(M(y) \wedge \Phi(a,y)\big)$ — 11, 12, σύζευξη
14. $(\exists x)\Big(E(x) \wedge (\exists y)\big(M(y) \wedge \Phi(x,y)\big)\Big)$ — 13, υπαρξιακή γενίκευση

43. $[(\exists x)[A(x)]']' \leftrightarrow (\forall x)[[A(x)]']'$ — άρνηση χρησιμοποιώντας το $[A(x)]'$ στη θέση του $A(x)$

$[(\exists x)[A(x)]']' \leftrightarrow (\forall x)A(x)$ — διπλή άρνηση

$(\forall x)[A(x)]' \leftrightarrow ([(\exists x)[A(x)]']')'$ — αντιθετοαντιστροφή (σε κάθε κατεύθυνση)

$(\forall x)[A(x)]' \leftrightarrow (\exists x)[A(x)]'$ — διπλή άρνηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.5

1. Ναι
3. Όχι
5. fish
7. fox, deer
9. *herbivore*(X) <= *eat*(X, Y) and *plant*(Y)
11. fox
13. α. anita
β. mike, kim
γ. Judith, sam, mike, kim, joan, hamal, Enrique, Jefferson
15. α. ?*authorof*(marktwain, houndofthebaskervilles)
β. ?*authorof*(williamfaulkner, X)
γ. *nonfictionauthor*(X) <= *authorof*(X, Y) and not *fiction*(Y)
δ. ?*nonfictionauthor*(X)
17. α. *fatherof*(X, Y) <= *parentof*(X, Y) and *male*(X)
β. *daughterof*(X, Y) <= *parentof*(X, Y) and *female*(X)
γ. *ancestorof*(X, Y) <= *parentof*(X, Y), *ancestorof*(X, Y) <= *parentof*(X, Z) and *ancestorof*(Z, Y)
19. α. ?dry(X) and ingredientof(X, Y)
β. ?*perishable*(Y) and *ingredientof*(X, Y) and *liquid*(X)
γ. *foundin*(X, Y) <= *ingredientof*(X, Y), *foundin*(X, Y) <= *ingredientof*(X, Z) and *foundin*(Z, Y)
21. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να συμφωνούν με τα αποτελέσματα των ασκήσεων 13 και 14.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.6

1. $x + 1 = y - 1 \leftrightarrow x = y - 2$
3. $3x - 1 = 2y - 1 \leftrightarrow 3x = 2y$
5. Δουλεύοντας προς τα πίσω από τη μετασυνθήκη χρησιμοποιώντας τον κανόνα εκχώρησης, έχουμε
   $\{x + 3 = 4\} \leftrightarrow x = 1$
   $\quad y = x + 3$
   $\{2y = 8$ ή $y = 4\}$
   $\quad y = 2 * y$
   $\{y = 8\}$
7. Δουλεύοντας προς τα πίσω από τη μετασυνθήκη χρησιμοποιώντας τον κανόνα εκχώρησης, έχουμε
   $\{2x + 1 = 1\} \leftrightarrow x = 0$
   $\quad z = 2x + 1$
   $\{z - 1 = 0$ ή $z = 1\}$
   $\quad \{y = 0\}$
9. Δουλεύοντας προς τα πίσω από τη μετασυνθήκη χρησιμοποιώντας τον κανόνα εκχώρησης, έχουμε
   $\{x(x - 1) = x(x - 1)\}$
   $\quad y = x - 1$
   $\{xy = x(x - 1)\}$
   $\quad y = x * y$
   $\{y = x(x - 1)\}$
   Εφόσον η προσυνθήκη είναι πάντοτε αληθής, το ίδιο ισχύει και για κάθε επόμενο ισχυρισμό συμπεριλαμβανομένης της μετασυνθήκης.
11. Χρησιμοποιώντας τον υπό συνθήκη κανόνα, οι δύο συνεπαγωγές που πρέπει να αποδείξουμε είναι
   $\{y = 0$ και $y < 5\}\ y = y + 1\ \{y = 1\}$ και $\{y = 0$ και $y \geq 5\}\ y = 5\ \{y = 1\}$
   Η πρώτη είναι αληθής από τον κανόνα εκχώρησης. Δουλεύοντας προς τα πίσω από τη μετασυνθήκη,
   $\{y + 1 = 1\} \leftrightarrow y = 0$
   $\quad y = y + 1$
   $\{y = 1\}$
   Η δεύτερη συνεπαγωγή είναι αληθής επειδή η υπόθεση είναι ψευδής.
13. Χρησιμοποιώντας τον υπό συνθήκη κανόνα, οι δύο συνεπαγωγές που πρέπει να αποδείξουμε είναι
   $\{x \neq 0$ και $x > 0\}\ y = 2 * x\ \{y > 0\}$ και $\{x \neq 0$ και $x \leq 0\}\ y = (-2) * x\ \{y > 0\}$
   Η πρώτη είναι αληθής από τον κανόνα εκχώρησης. Δουλεύοντας προς τα πίσω από τη μετασυνθήκη, έχουμε
   $\{2 * x > 0\} \leftrightarrow x > 0 \leftrightarrow x \neq 0$ και $x > 0$
   $\quad y = 2 * x$
   $\{y > 0\}$
   Η δεύτερη συνεπαγωγή είναι αληθής από τον κανόνα εκχώρησης. Δουλεύοντας προς τα πίσω από τη μετασυνθήκη, έχουμε
   $\{(-2) * x > 0\} \leftrightarrow x < 0 \leftrightarrow x \neq 0$ και $x \leq 0$

$y = (-2) * x$

$\{y > 0\}$

15. Χρησιμοποιώντας τον υπό συνθήκη κανόνα και τον ορισμό της απόλυτης τιμής για έναν μη μηδενικό αριθμό, οι δύο συνεπαγωγές που πρέπει να αποδείξουμε είναι

$$\{x \neq 0 \text{ και } x \geq 0\}\, abs = x\, \{(x > 0 \text{ και } abs = x) \text{ ή } (x < 0 \text{ και } abs = -x)\}$$

$$\{x \neq 0 \text{ και } x < 0\}\, abs = -x\, \{(x > 0 \text{ και } abs = x) \text{ ή } (x < 0 \text{ και } abs = -x)\}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα εκχώρησης στην πρώτη συνεπαγωγή μας δίνει την προσυνθήκη

$$(x > 0 \text{ και } x = x) \text{ ή } (x < 0 \text{ και } x = -x) \leftrightarrow (x > 0 \text{ και } x = x) \leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \geq 0)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα εκχώρησης στη δεύτερη συνεπαγωγή μας δίνει την προσυνθήκη

$$(x > 0 \text{ και } -x = x) \text{ ή } (x < 0 \text{ και } -x = -x) \leftrightarrow (x < 0 \text{ και } -x = -x)$$
$$\leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x < 0)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.1

1. α. Αν δεν υπάρχει υγιής ανάπτυξη των φυτών, τότε δεν υπάρχει αρκετό νερό.
β. Αν δεν υπάρχει αυξημένη διαθεσιμότητα πληροφοριών, τότε δεν υπάρχουν περαιτέρω τεχνολογικές εξελίξεις.
γ. Καμία τροποποίηση του προγράμματος δεν συνεπάγεται ότι δεν θα προκύψουν σφάλματα.
δ. Κακή μόνωση και μερικά παράθυρα που δεν είναι παράθυρα καταιγίδας συνεπάγονται τη μη εξοικονόμηση καυσίμου.

3. Για παράδειγμα:
α. ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
β. 0
γ. ένας κοντός άνθρωπος με μπλε μάτια και κόκκινα μαλλιά.
δ. ένας άνθρωπος με κόκκινα μαλλιά που είναι κοντός.

5. Το μισό κομμάτι της συγκεκριμένης πρότασης είναι αληθές. Αν ο n είναι περιττός ακέραιος, ο $3n + 5$ είναι ένας άρτιος ακέραιος. Ωστόσο, η αντίστροφη πρόταση είναι ψευδής. Θεωρείστε τον άρτιο ακέραιο 6. Αν $3n + 5 = 6$, τότε $3n = 1$ οπότε $n = 1/3$ που όχι μόνο δεν είναι περιττός ακέραιος, αλλά δεν είναι καν ακέραιος. Δείτε την Άσκηση 25.

7. α. $4 + 6 = 10$. Οι ακέραιοι 4 και 6 είναι άρτιοι, αλλά το 10 δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.
β. Το λάθος βρίσκεται στην επιλογή αμφότερων των x και y να είναι ίσοι με $2m$. Αυτό σημαίνει ότι είναι ο ίδιος αριθμός, το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση.

9. $25 = 5^2 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$
$100 = 10^2 = 36 + 64 = 6^2 + 8^2$
$169 = 13^2 = 25 + 144 = 5^2 + 12^2$

11. $n = 1,\ n! = 1,\ 2^n = 2$
$n = 2,\ n! = 2,\ 2^n = 4$
$n = 3,\ n! = 6,\ 2^n = 8$

13. Έστω $x = 2m, y = 2n$ όπου οι m, n είναι ακέραιοι. Τότε $x + y = 2m + 2n = 2(m + n)$ όπου ο $m + n$ είναι ακέραιος, οπότε ο $x + y$ είναι άρτιος.

15. Έστω $x = 2m + 1, y = 2n + 1$ όπου οι m, n είναι ακέραιοι. Τότε $x + y = (2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$, όπου ο $m + n + 1$ είναι ακέραιος, οπότε ο $x + y$ είναι άρτιος.

17. Έστω $x = 2m + 1, y = 2n$ όπου οι m, n είναι ακέραιοι. Τότε $x - y = 2m + 1 - 2n = 2(m - n) + 1$ όπου ο $m - n$ είναι ακέραιος, οπότε ο $x - y$ είναι περιττός.

19. Για δύο διαδοχικούς ακέραιους, ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος είναι περιττός. Από την απόδειξη του Παραδείγματος 9, το γινόμενο ενός άρτιου ακέραιου και ενός περιττού ακέραιου είναι άρτιος.

21. Έστω $x = 2m$ όπου m είναι ένας ακέραιος. Τότε $x^2 = (2m)^2 = 4m^2$, όπου ο m^2 είναι ακέραιος. Συνεπώς, ο x^2 διαιρείται από το 4.

23. Η αντιθετοαντίστροφη πρόταση είναι: αν $x + 1 \leq 0$, τότε $x \leq 0$. Αν $x + 1 \leq 0$, τότε $x \leq -1 < 0$, οπότε $x < 0$ και συνεπώς $x \leq 0$.

25. Αν ο n είναι περιττός, τότε $n = 2k + 1$ για κάποιον ακέραιο k. Τότε $3n + 5 = 3(2k + 1) + 5 = 6k + 8$. Για την αντίστροφη πρόταση, αν $3n + 5 = 6k + 8$ για κάποιον ακέραιο k, τότε $3n = 6k + 3$ ή $3n = 3(2k + 1)$ και $n = 2k + 1$ για κάποιον ακέραιο k, οπότε ο n είναι ένας περιττός ακέραιος.

27. Αν $x < y$ τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας με τους θετικούς αριθμούς x και y παίρνουμε $x^2 < xy$ και $xy < y^2$ και συνεπώς $x^2 < xy < y^2$ ή $x^2 < y^2$. Για την άλλη κατεύθυνση, αν $x^2 < y^2$, τότε από τον ορισμό του $<$ έχουμε $y^2 - x^2 > 0$, οπότε παραγοντοποιώντας έχουμε $(y + x)(y - x) > 0$, δηλαδή $y + x < 0$ και $y - x < 0$ ή $y + x > 0$ και $y - x > 0$ αφού ένας θετικός αριθμός είναι το γινόμενο δύο αρνητικών ή δύο θετικών αριθμών. Όμως δεν μπορεί να ισχύει $y + x < 0$ αφού οι y και x είναι και οι δύο θετικοί. Επομένως, $y + x > 0$ και $y - x > 0$ δηλαδή $y > x$.

29. Έστω n ένας πρώτος αριθμός με $n = 2k$ όπου k είναι ένας ακέραιος. Τότε και το 2 και το k διαιρούν τον n. Εφόσον ο n είναι πρώτος διαιρείται μόνο από το 1 και τον εαυτό του, οπότε $n = 2$ και $k = 1$. Επομένως, $n = 2$.

31. Έστω ότι οι p και q διαιρούνται από τον n. Τότε $p = k_1 n$ και $q = k_2 n$, όπου οι k_1 και k_2 είναι ακέραιοι και $p + q = k_1 n + k_2 n = (k_1 + k_2)n$, όπου ο $k_1 + k_2$ είναι ακέραιος. Επομένως, ο $p + q$ διαιρείται από τον n.

33. Εφόσον $n \mid m$, $m = k_1 n$ για κάποιον ακέραιο k_1. Εφόσον $m \mid p$, $p = k_2 m$ για κάποιον ακέραιο k_2. Τότε $p = k_2 m = k_2(k_1 n) = (k_1 k_2)n$ όπου ο $k_2 k_1$ είναι ακέραιος, οπότε $n \mid p$.

35. Έστω $x = 2n + 1$. Τότε $x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Όμως, ο $n(n + 1)$ είναι άρτιος (Άσκηση 19), οπότε $n(n + 1) = 2k$ για κάποιον ακέραιο k. Επομένως, $x^2 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$.

37. $m^2 n^2 = (mn)^2$

39. Αποδεικνύουμε κατά περίπτωση, ανάλογα με το αν οι x και y είναι αρνητικοί.
Περίπτωση 1: $x \geq 0, y \geq 0$. Τότε $|x| = x, |y| = y$. Επίσης, $x + y \geq 0$ και $|x + y| = x + y$. Επομένως, $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.
Περίπτωση 2: $x \geq 0, y < 0$. Τότε $|x| = x, |y| = -y$. Υποπερίπτωση (α): $x + y \geq 0$. Τότε $|x + y| = x + y$. Επομένως, $|x + y| = x + y < x + (-y) = |x| + |y|$ (θυμηθείτε ότι ο y είναι αρνητικός, οπότε ο $-y$ είναι θετικός). Υποπερίπτωση (β): $x + y < 0$. Τότε $|x + y| = -(x + y)$. Επομένως, $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq x + (-y) = |x| + |y|$ (θυμηθείτε ότι $x \geq 0$, οπότε $-x \leq 0$).
Περίπτωση 3: $x < 0, y \geq 0$. Παρόμοια με την περίπτωση 2 με τους ρόλους των x και y να αντιστρέφονται.
Περίπτωση 4: $x < 0, y < 0$. Τότε $|x| = -x, |y| = -y$. Επίσης $x + y < 0$ και $|x + y| = -(x + y)$. Επομένως, $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$.

41. Απόδειξη με Απαγωγή σε Άτοπο. Αν $x_1 < A, x_2 < A, \ldots, x_n < A$, τότε $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < A + A + \cdots + A = nA$ και $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n < A$ το οποίο αντιβαίνει στον ορισμό του A ως ο μέσος όρος των $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

43. Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{3}$ είναι ρητός. Τότε $\sqrt{3} = p/q$ όπου οι p, q είναι ακέραιοι, $q \neq 0$ και επίσης οι p, q δεν έχουν κοινούς παράγοντες (εκτός το ± 1). Αν $\sqrt{3} = p/q$, τότε $3 = p^2/q^2$ ή $3q^2 = p^2$. Τότε το 3 διαιρεί τον p^2, οπότε διαιρεί και τον p. Έτσι, το 3 είναι παράγοντας του p ή αλλιώς το 9 είναι παράγοντας του p^2 και η ισότητα $3q^2 = p^2$ μπορεί να γραφτεί ως $3q^2 = 9x$ ή $q^2 = 3x$. Τότε το 3 διαιρεί τον q^2, οπότε διαιρεί και τον q. Επομένως, το 3 είναι κοινός παράγοντας των p και q, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι οι p, q δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

45. Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt[3]{2}$ είναι ρητός. Τότε $\sqrt[3]{2} = p/q$ όπου οι p, q είναι ακέραιοι, $q \neq 0$ και επίσης οι p, q δεν έχουν κοινούς παράγοντες (εκτός το ± 1). Αν $\sqrt[3]{2} = p/q$, τότε $2 =$

p^3/q^3 ή $2q^3 = p^3$. Τότε το 2 διαιρεί τον p^3, οπότε διαιρεί και τον p. Έτσι, το 2 είναι παράγοντας του p ή αλλιώς το 8 είναι παράγοντας του p^3 και η ισότητα $2q^3 = p^3$ μπορεί να γραφτεί ως $2q^3 = 8x$ ή $q^3 = 4x$. Τότε το 2 διαιρεί το $4x$, οπότε το 2 διαιρεί τον q^3 συνεπώς διαιρεί και τον q. Επομένως, το 2 είναι κοινός παράγοντας των p και q, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι οι p, q δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

47. $0 = 0 \cdot 2$, το οποίο είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2.

49. Ο 297 είναι ένας σύνθετος αριθμός, $297 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$.

51. Αντιπαράδειγμα: $9 - 7 = 2$.

53. Απόδειξη: Αν ο x είναι άρτιος, τότε $x = 2n$ και $x(x+1)(x+2) = (2n)(2n+1)(2n+2) = 2[n(2n+1)(2n+2)]$, ο οποίος είναι άρτιος. Αν ο x είναι περιττός, τότε $x = 2n+1$ και $x(x+1)(x+2) = (2n+1)(2n+2)(2n+3) = 2[(2n+1)(n+1)(2n+3)]$, ο οποίος είναι άρτιος.

55. Απόδειξη: Αν ο x είναι άρτιος, τότε $x = 2n$ και $x + x^3 = 2n + (2n)^3 = 2n + 8n^3 = 2(n + 4n^3)$, ο οποίος είναι άρτιος. Αν ο x είναι περιττός, τότε $x = 2n+1$ και $x + x^3 = (2n+1) + (2n+1)^3 = (2n+1) + (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) = 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2 = 2(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$, ο οποίος είναι άρτιος.

57. Αντιπαράδειγμα: $3 \cdot 9 = 27$.

59. Έστω n ένας περιττός ακέραιος και m ένας άρτιος ακέραιος. Τότε, από το Παράδειγμα 9, ο n^2 είναι περιττός και, από το Παράδειγμα 5, ο m^2 είναι άρτιος. Τότε ο $n^2 + m^2$ είναι το άθροισμα ενός περιττού και ενός άρτιου ακέραιου, οπότε, από την Άσκηση 16, είναι περιττός.

61. Για $n = 1$,

$$n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Για $n \geq 2$,

$$n + \frac{1}{n} \geq 2 + \frac{1}{n} > 2$$

αφού ο $1/n$ είναι θετικός αριθμός.

63. Αντιπαράδειγμα: ο 5 είναι πρώτος, αλλά ο $5 + 4 = 9$ δεν είναι πρώτος.

65. Απόδειξη: $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ όπου $n - 1 > 1$ (αφού $n > 2$) που είναι μια μη τετριμμένη παραγοντοποίηση, οπότε ο αριθμός δεν είναι πρώτος.

67. Αντιπαράδειγμα: $4^2 + 4 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$ που δεν είναι πρώτος.

69. Απόδειξη: Έστω x, y δύο ρητοί αριθμοί, $x = p/q$, $y = r/s$ με p, q, r, s ακέραιοι και $q, s \neq 0$. Τότε

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$$

όπου οι $ps + rq$ και qs είναι ακέραιοι με $qs \neq 0$ και οποιοιδήποτε κοινοί παράγοντες των q και s μπορούν να απομακρυνθούν. Άρα, ο $x + y$ είναι ρητός.

71. Αντιπαράδειγμα: ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, αλλά $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ που είναι ρητός.

73. Από την πρώτη πρόταση, η γωνία 6 συν τη γωνία 5 συν την ορθή γωνία έχουν άθροισμα 180^o. Από την τέταρτη πρόταση, η ορθή γωνία είναι 90^o. Επομένως, η γωνία 6 συν τη γωνία 5 έχουν άθροισμα 90^o. Από τη δεύτερη πρόταση, η γωνία 6 έχει το ίδιο μέτρο με τη γωνία 3. Επομένως, η γωνία 3 συν τη γωνία 5 έχουν άθροισμα 90^o.

75. Υποθέτουμε ότι η γωνία 1 και η γωνία 5 έχουν το ίδιο μέτρο. Όπως και στην Άσκηση 73, η γωνία 3 συν τη γωνία 5 έχουν άθροισμα 90^o. Εφόσον η γωνία 1 και η γωνία 5 έχουν το ίδιο μέτρο, η γωνία 3 συν τη γωνία 1 έχουν άθροισμα 90^o. Επίσης, από τη πρώτη πρόταση, η γωνία 3 συν τη γωνία 1 συν τη γωνία 2 έχουν άθροισμα 180^o. Επομένως, 90^o συν τη γωνία 2 έχουν άθροισμα 180^o ή αλλιώς γωνία $2 = 90^o$. Από τη τέταρτη πρόταση, η γωνία 2 είναι ορθή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.2

1. α. $P(1)$: $4 \cdot 1 - 2 = 2 \cdot 1^2$ ή $2 = 2$ (αληθής)
β. $P(k)$: $2 + 6 + 10 + \cdots + (4k - 2) = 2k^2$
γ. $P(k+1)$: $2 + 6 + 10 + \cdots + [4(k+1) - 2] = 2(k+1)^2$
δ. Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$2 + 6 + 10 + \cdots + [4(k+1) - 2]$
$= 2 + 6 + 10 + \cdots (4k - 2) + [4(k+1) - 2]$ (γράφουμε τον προτελευταίο όρο)
$= 2k^2 + 4(k+1) - 2$ $\big($χρησιμοποιώντας την $P(k)\big)$
$= 2k^2 + 4k - 2$
$= 2(k^2 + 2k - 1)$
$= 2(k+1)^2$ το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

3. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1 = 1(2 \cdot 1 - 1)$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1 + 5 + 9 + \cdots + [4(k+1) - 3] = (k+1)[2(k+1) - 1]$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1 + 5 + 9 + \cdots + [4(k+1) - 3]$
$= 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) + [4(k+1) - 3]$
$= k(2k - 1) + 4(k+1) - 3$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= 2k^2 - k + 4k + 1$
$= 2k^2 + 3k + 1$
$= (k+1)[2(k+1) - 1]$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

5. Βήμα βάσης: $P(1)$: $6 - 2 = 1(3 \cdot 1 + 1)$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2) = k(3k + 1)$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $4 + 10 + 16 + \cdots + [6(k+1) - 2] = (k+1)[3(k+1) + 1]$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$4 + 10 + 16 + \cdots + [6(k+1) - 2]$
$= 4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2) + [6(k+1) - 2]$
$= k(3k + 1) + 6(k+1) - 2$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= 3k^2 + k + 6k + 4$
$= 3k^2 + 7k + 4$
$= (k+1)[3k + 4]$
$= (k+1)[3(k+1) + 1]$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

7. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1^2 = 1(1+1)(2+1)/6$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1^2 + 2^2 + \cdots + (k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2(k+1)+1)/6$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2$
$= 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$= k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= (k+1)[k(2k+1)/6+k+1]$
$= (k+1)[(2k^2+k+6k+6)/6]$
$= (k+1)(2k^2+7k+6)/6)$
$= (k+1)(k+2)(2k+3)/6$
$= (k+1)(k+2)(2(k+1)+1)/6$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

9. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1^2 = 1(2-1)(2+1)/3$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2 = k(2k-1)(2k+1)/3$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1^2+3^2+\cdots+[2(k+1)-1]^2 = (k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)/3$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1^2+3^2+\cdots+[2(k+1)-1]^2$
$= 1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2+[2(k+1)-1]^2$
$= k(2k-1)(2k+1)/3+[2(k+1)-1]$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= k(2k-1)(2k+1)/3+(2k+1)^2$
$= (2k+1)[k(2k-1)/3+2k+1]$
$= (2k+1)(2k^2-k+6k+3)/3)$
$= (2k+1)(2k^2+5k+3)/3$
$= (2k+1)(k+1)(2k+3)/3$
$= (k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)/3$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

11. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1\cdot 3 = 1\cdot 2\cdot 9/6$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+k(k+2) = k(k+1)(2k+7)/6$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(k+1)(k+3) = (k+1)(k+2)(2(k+1)+7)/6$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(k+1)(k+3)$
$= 1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)$
$= k(k+1)(2k+7)/6+(k+1)(k+3)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= (k+1)[k(2k+7)+6(k+3)]/6$
$= (k+1)(2k^2+13k+18)/6$
$= (k+1)(k+2)(2k+9)/6)$
$= (k+1)(k+2)(2(k+1)+7)/6$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

13. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1/(1\cdot 2) = 1/(1+1)$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots+1/k(k+1) = k/(k+1)$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots+1/(k+1)(k+2) = (k+1)/(k+2)$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots+1/(k+1)(k+2)$
$= 1/(1\cdot 2)+1/(2\cdot 3)+\cdots+1/k(k+1)+1/(k+1)(k+2)$

$= k/(k+1) + 1/(k+1)(k+2)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= [k(k+2)+1]/(k+1)(k+2)$
$= (k^2+2k+1)/(k+1)(k+2)$
$= (k+1)^2/(k+1)(k+2)$
$= (k+1)/(k+2)$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

15. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1^2 = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2/2$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}k(k+1)/2$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k+2}(k+1)^2 = (-1)^{k+2}(k+1)(k+2)/2$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k+2}(k+1)^2$
$= 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2$
$= (-1)^{k+1}k(k+1)/2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= [(-1)^{k+1}k(k+1) + 2(-1)^{k+2}(k+1)^2]/2$
$= (-1)^{k+2}(k+1)[k(-1)^{-1} + 2(k+1)]/2$
$= (-1)^{k+2}(k+1)[-k+2k+2]/2$
$= (-1)^{k+2}(k+1)(k+2)/2$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

17. Βήμα βάσης: $P(1)$: $2^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2+1)/3$ ή $4 = 2 \cdot 6/3$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 = 2k(k+1)(2k+1)/3$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $2^2 + 4^2 + \cdots + [2(k+1)]^2 = 2(k+1)(k+2)([2(k+1)+1]/3$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$2^2 + 4^2 + \cdots + [2(k+1)]^2$
$= 2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 + [2(k+1)]^2$
$= 2k(k+1)(2k+1)/3 + [2(k+1)]^2$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= 2(k+1)[k(2k+1)/3 + 2(k+1)]$
$= 2(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]/3$
$= 2(k+1)[2k^2+7k+6]/3$
$= 2(k+1)(k+2)(2k+3)/3$
$= 2(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]/3$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

19. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/3$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = k(k+1)(k+2)/3$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)(k+3)/3$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k+1)(k+2)$
$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$
$= k(k+1)(k+2)/3 + (k+1)(k+2)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= (k+1)(k+2)[k/3+1]$
$= (k+1)(k+2)(k+3)/3$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

21. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1/(1 \cdot 4) = 1/(3 \cdot 1 + 1)$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $1/(1 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 7) + 1/(7 \cdot 10) + \cdots + 1/(3k-2)(3k+1) = k/(3k+1)$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1/(1 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 7) + 1/(7 \cdot 10) + \cdots + 1/(3(k+1)-2)(3(k+1)+1) = (k+1)/[3(k+1)+1]$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$1/(1 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 7) + 1/(7 \cdot 10) + \cdots + 1/(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)$

$= 1/(1 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 7) + 1/(7 \cdot 10) + \cdots + 1/(3k-2)(3k+1) + 1/(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)$

$= k/(3k+1) + 1/(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$= k/(3k+1) + 1/(3k+1)(3k+4)$

$= [k(3k+4)+1]/(3k+1)(3k+4)$

$= (3k^2+4k+1)/(3k+1)(3k+4)$

$= (3k+1)(k+1)/(3k+1)(3k+4)$

$= (k+1)/[3(k+1)+1]$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

23. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1 + 4 = (4^2-1)/3$ ή $5 = 15/3$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^k = (4^{k+1}-1)/3$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k+1} = (4^{k+2}-1)/3$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k+1}$

$= 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^k + 4^{k+1}$

$= (4^{k+1}-1)/3 + 4^{k+1}$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$= (4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1})/3$

$= (4 \cdot 4^{k+1} - 1)/3$

$= (4^{k+2}-1)/3$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

25. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1 = (3-1)/2$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3k-2) = k(3k-1)/2$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3(k+1)-2) = (k+1)(3(k+1)-1)/2$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3k-2) + (3(k+1)-2)$

$= 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3(k+1)-2)$

$= k(3k-1)/2 + (3(k+1)-2)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$= [k(3k-1) + 2(3(k+1)-2)]/2$

$= (3k^2 - k + 6k + 6 - 4)/2$

$= (3k^2 + 5k + 2)/2$

$= (k+1)(3k+2)/2$

$= (k+1)(3(k+1)-1)/2$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

27. Βήμα βάσης: $P(1)$: $a = (a - ar)/(1-r) = a(1-r)/(1-r)$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $a + ar + \cdots + ar^{k-1} = (a - ar^k)/(1-r)$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $a + ar + \cdots + ar^k = (a - ar^{k+1})/(1-r)$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$a + ar + \cdots + ar^k$

$= a + ar + \cdots + ar^{k-1} + ar^k$
$= (a - ar^k)/(1-r) + ar^k$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= [a - ar^k + ar^k(1-r)]/(1-r)$
$= (a - ar^{k+1})/(1-r)$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

29. α. 4.882.812
β. 64.592.673.600
γ. 225
δ. 884

31. Βήμα βάσης: $P(2)$: $2^2 > 2 + 1$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $k^2 > k + 1$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(k+1)^2 > k + 2$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$(k+1)^2$
$= k^2 + 2k + 1$
$> (k+1) + 2k + 1$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= 3k + 2$
$> k + 2$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

33. Βήμα βάσης: $P(7)$: $7^2 > 5 \cdot 7 + 10$ ή $49 > 45$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $k^2 > 5k + 10$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(k+1)^2 > 5(k+1) + 10 = 5k + 15$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$(k+1)^2$
$= k^2 + 2k + 1$
$> (5k + 10) + 2k + 1$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$= 5k + 2k + 11$
$> 5k + 12 + 11$ (αφού $k > 6$)
$= 5k + 23$
$> 5k + 15$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

35. Βήμα βάσης: $P(4)$: $4! > 4^2$ ή $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 > 16$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $k! > k^2$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(k+1)! > (k+1)^2$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:
$(k+1)!$
$= k!\,(k+1)$
$> k^2(k+1)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)
$> (k+1)(k+1)$ (από την Άσκηση 31 αφού $k \geq 4$)
$= (k+1)^2$
το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

37. Βήμα βάσης: $P(4)$: $4! > 2^4$ ή $24 > 16$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $k! > 2^k$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(k+1)! > 2^{k+1}$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$(k+1)!$

$= k!\,(k+1)$

$> 2^k(k+1)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$> 2^k \cdot 2$ (αφού $k \geq 4$)

$= 2^{k+1}$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

39. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1! > 2^0$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $k! > 2^{k-1}$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(k+1)! > 2^k$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$(k+1)!$

$= k!\,(k+1)$

$> 2^{k-1}(k+1)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$> 2^{k-1} \cdot 2$ (αφού $k \geq 1$ οπότε $k+1 \geq 2$)

$= 2^k$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

41. Βήμα βάσης: $P(2)$: $(1+x)^2 > 1+x^2$ ή $1+2x+x^2 > 1+x^2$ (αληθής αφού το $x > 0$ συνεπάγεται $2x > 0$)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $(1+x)^k > 1+x^k$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(1+x)^{k+1} > 1+x^{k+1}$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$(1+x)^{k+1}$

$= (1+x)^k(1+x)$

$> (1+x^k)(1+x)$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$= 1+x^k+x+x^{k+1}$

$> 1+x^{k+1}$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

43. Βήμα βάσης: $P(2)$: $1+2 < 2^2$ ή $3 < 4$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $1+2+\cdots+k < k^2$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1+2+\cdots+(k+1) < (k+1)^2$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$1+2+\cdots+(k+1)$

$= 1+2+\cdots+k+(k+1)$

$< k^2+k+1$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

$< k^2+2k+1$

$= (k+1)^2$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

45. α. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1+(1/2) < 2$ (αληθής)

Υποθέτουμε την $P(k)$: $1+(1/2)+\cdots+(1/2^k) < 2$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1+(1/2)+\cdots+(1/2^{k+1}) < 2$.

Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$1+(1/2)+\cdots+(1/2^{k+1})$

$= 1+(1/2)+\cdots+(1/2^k)+(1/2^{k+1})$

$< 2+(1/2^{k+1})$ (χρησιμοποιώντας την $P(k)$)

αλλά το $2+(1/2^{k+1})$ δεν είναι μικρότερο του 2.

β. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1 + (1/2) < 2 - (1/2)$ (αληθής)
Υποθέτουμε την $P(k)$: $1 + (1/2) + \cdots + (1/2^k) < 2 - (1/2^k)$.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $1 + (1/2) + \cdots + (1/2^{k+1}) < 2 - (1/2^{k+1})$.
Το αριστερό μέλος της $P(k+1)$ είναι:

$$
\begin{aligned}
&1 + (1/2) + \cdots + (1/2^{k+1}) \\
&\quad = 1 + (1/2) + \cdots + (1/2^k) + (1/2^{k+1}) \\
&\quad < 2 - (1/2^k) + (1/2^{k+1}) \quad \text{(χρησιμοποιώντας την } P(k)\text{)} \\
&\quad = 2 - (2/2^{k+1}) + (1/2^{k+1}) \\
&\quad = 2 - (1/2^{k+1})
\end{aligned}
$$

το οποίο είναι το δεξί μέλος της $P(k+1)$.

47. Βήμα βάσης: $P(1)$: $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ και $7 \mid 7$.
Υποθέτουμε την $P(k)$: $7 \mid 2^{3k} - 1$ οπότε $2^{3k} - 1 = 7m$ ή $2^{3k} = 7m + 1$ για κάποιον ακέραιο m.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $7 \mid 2^{3(k+1)} - 1$.

$$
\begin{aligned}
&2^{3(k+1)} - 1 \\
&\quad = 2^{3k+3} - 1 \\
&\quad = 2^{3k} \cdot 2^3 - 1 \\
&\quad = (7m + 1) \cdot 2^3 - 1 \\
&\quad = 7 \cdot 2^3 m + 8 - 1 \\
&\quad = 7(2^3 m + 1)
\end{aligned}
$$

όπου ο $2^3 m + 1$ είναι ακέραιος, οπότε $7 \mid 2^{3(k+1)} - 1$.

49. Βήμα βάσης: $P(1)$: $7 - 2 = 5$ και $5 \mid 5$.
Υποθέτουμε την $P(k)$: $5 \mid 7^k - 2^\kappa$ οπότε $7^k - 2^k = 5m$ ή $7^k = 5m + 2^k$ για κάποιον ακέραιο m.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $5 \mid 7^{k+1} - 2^{k+1}$.

$$
\begin{aligned}
&7^{k+1} - 2^{k+1} \\
&\quad = 7 \cdot 7^k - 2^{k+1} \\
&\quad = 7(5m + 2^k) - 2^{k+1} \\
&\quad = 5 \cdot 7m + 2^k(7 - 2) \\
&\quad = 5(7m + 2^k)
\end{aligned}
$$

όπου ο $7m + 2^k$ είναι ακέραιος, οπότε $5 \mid 7^{k+1} - 2^{k+1}$.

51. Βήμα βάσης: $P(1)$: $2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$ και $3 \mid 3$.
Υποθέτουμε την $P(k)$: $3 \mid 2^k + (-1)^{k+1}$ οπότε $2^k + (-1)^{k+1} = 3m$ ή $2^k = 3m - (-1)^{k+1}$ για κάποιον ακέραιο m.
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $3 \mid 2^{k+1} + (-1)^{k+2}$.

$$
\begin{aligned}
&2^{k+1} + (-1)^{k+2} \\
&\quad = 2 \cdot 2^k + (-1)^{k+2} \\
&\quad = 2(3m - (-1)^{k+1}) + (-1)^{k+2} \\
&\quad = 3 \cdot 2m - 2 \cdot (-1)^{k+1} + (-1)^{k+2} \\
&\quad = 3 \cdot 2m + (-1)^{k+1}\big(-2 + (-1)\big) \\
&\quad = 3 \cdot 2m + (-1)^{k+1}(-3) \\
&\quad = 3(2m - (-1)^{k+1})
\end{aligned}
$$

όπου ο $2m - (-1)^{k+1}$ είναι ακέραιος, οπότε $3 \mid 2^{k+1} + (-1)^{k+2}$.

53. Βήμα βάσης: $P(1)$: $3^{4+2}+5^{2+1}=3^6+5^3=729+125=854=61\cdot 14$ και $14 \mid 61\cdot 14$.

Υποθέτουμε την $P(k)$: $14 \mid 3^{4k+2}+5^{2k+1}$ οπότε $3^{4k+2}+5^{2k+1}=14m$ ή $3^{4k+2}=14m-5^{2k+1}$ για κάποιον ακέραιο m.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $14 \mid 3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}$.

$$\begin{aligned}
&3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}\\
&\quad = 3^{4k+2}\cdot 3^4+5^{2k+3}\\
&\quad = (14m-5^{2k+1})\cdot 3^4+5^{2k+3}\\
&\quad = 14m\cdot 3^4-5^{2k+1}\cdot 3^4+5^{2k+1}\cdot 5^2\\
&\quad = 14m\cdot 3^4-5^{2k+1}(3^4-5^2)\\
&\quad = 14m\cdot 3^4-5^{2k+1}(81-25)\\
&\quad = 14m\cdot 3^4-5^{2k+1}\cdot 56\\
&\quad = 14(m\cdot 3^4-4\cdot 5^{2k+1})
\end{aligned}$$

όπου ο $m\cdot 3^4-4\cdot 5^{2k+1}$ είναι ακέραιος, οπότε $14 \mid 3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}$.

55. Βήμα βάσης: $P(1)$: $10+3\cdot 4^3+5=10+192+5=207=9\cdot 23$ και $9 \mid 9\cdot 23$.

Υποθέτουμε την $P(k)$: $9 \mid 10^k+3\cdot 4^{k+2}+5$ οπότε $10^k+3\cdot 4^{k+2}+5=9m$ ή $10^k=9m-3\cdot 4^{k+2}-5$ για κάποιον ακέραιο m.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $9 \mid 10^{k+1}+3\cdot 4^{k+3}+5$.

$$\begin{aligned}
&10^{k+1}+3\cdot 4^{k+3}+5\\
&\quad = 10\cdot 10^k+3\cdot 4^{k+3}+5\\
&\quad = 10(9m-3\cdot 4^{k+2}-5)+3\cdot 4^{k+3}+5\\
&\quad = 9\cdot 10m-30\cdot 4^{k+2}-50+3\cdot 4^{k+2}\cdot 4+5\\
&\quad = 9\cdot 10m-45-3\cdot 4^{k+2}(10-4)\\
&\quad = 9(10m-5)-18\cdot 4^{k+2}\\
&\quad = 9(10m-5-2\cdot 4^{k+2})
\end{aligned}$$

όπου ο $10m-5-2\cdot 4^{k+2}$ είναι ακέραιος, οπότε $9 \mid 10^{k+1}+3\cdot 4^{k+3}+5$.

57. Βήμα βάσης: $P(1)$: $1^3+2\cdot 1=3$ και $3 \mid 3$.

Υποθέτουμε την $P(k)$: $3 \mid k^3+2k$ οπότε $k^3+2k=3m$ για κάποιον ακέραιο m.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $3 \mid (k+1)^3+2(k+1)$.

$$\begin{aligned}
&(k+1)^3+2(k+1)\\
&\quad = k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\
&\quad = k^3+2k+3(k^2+k+1)\\
&\quad = 3m+3(k^2+k+1)\\
&\quad = 3(m+k^2+k+1)
\end{aligned}$$

όπου ο $m+k^2+k+1$ είναι ακέραιος, οπότε $3 \mid (k+1)^3+2(k+1)$.

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα έπεται επίσης άμεσα από την Άσκηση 56 αφού:
$n^3+2n=n^3-n+3n=3m+3n$ (από την Άσκηση 56) $=3(m+n)$.

59. Βήμα βάσης: $P(1)$: $\cos\theta+i\sin\theta=\cos\theta+i\sin\theta$.

Υποθέτουμε την $P(k)$: $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$.

Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$.

$$\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&= (\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&= \cos k\theta\cos\theta+i\sin k\theta\cos\theta+i\cos k\theta\sin\theta+i^2\sin k\theta\sin\theta\\
&= \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\
&= \cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta
\end{aligned}$$

61. Η πρόταση προς απόδειξη είναι ότι ο αριθμός $n(n+1)(n+2)$ διαιρείται από το 3 για $n \geq 1$.

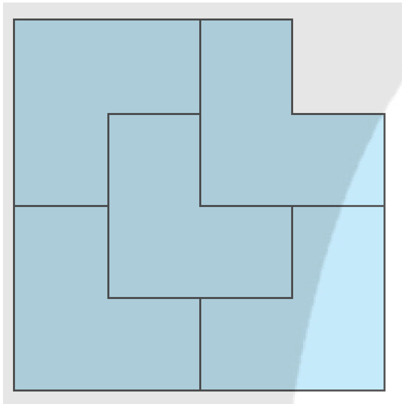
Βήμα βάσης: $P(1)$: $1(1+1)(1+2) = 6$ διαιρείται από το 3, (αληθής).

Υποθέτουμε την $P(k)$: $k(k+1)(k+2) = 3m$ για κάποιον ακέραιο m.

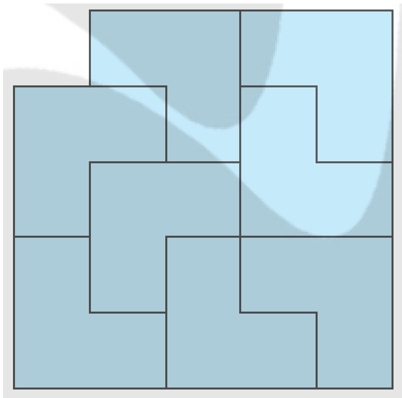
Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$: $(k+1)(k+2)(k+3)$ διαιρείται από το 3.

$$(k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)k + (k+1)(k+2)3 = 3m + (k+1)(k+2)3$$
$$= 3[m + (k+1)(k+2)]$$

63.



65.



67. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n. Η $P(1)$ είναι αληθής αφού 1 γραμμή χωρίζει το επίπεδο σε 2 περιοχές και $(1^2+1+2)/2 = 2$. Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ είναι αληθής: k γραμμές χωρίζουν το επίπεδο σε $(k^2+k+2)/2$ περιοχές. Αποδεικνύουμε την $P(k+1)$, δηλαδή ότι $k+1$ γραμμές χωρίζουν το επίπεδο σε $[(k+1)^2+(k+1)+2]/2$ περιοχές. Μια νέα γραμμή δημιουργεί έναν αριθμό περιοχών μεγαλύτερο κατά μία μονάδα από τον αριθμό των γραμμών που τέμνει. Όταν προστίθεται η γραμμή $k+1$, αυτή θα τέμνει k γραμμές (αφού δεν υπάρχουν παράλληλες γραμμές και δεν έχουν κοινά σημεία τομής). Επομένως, δημιουργούνται $k+1$ νέες περιοχές. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός των περιοχών είναι κατά $k+1$ μεγαλύτερος από τον αριθμός των περιοχών που υπάρχει με k γραμμές, ή

$$\frac{k^2+k+2}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k+2+2(k+1)}{2} = \frac{k^2+3k+4}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$$

69. Η $P(1)$ είναι $1 = 1+1$ η οποία δεν είναι αληθής.

71. α. Έστω $P(n)$ η ιδιότητα ότι οποιαδήποτε λέξη που δημιουργείται από την παράθεση n λέξεων – συνιστωσών έχει άρτιο αριθμό όμικρον (o). Τότε η $P(1)$ είναι αληθής αφού οι μόνες λέξεις με 1 λέξη – συνιστώσα είναι οι λέξεις *moon*, *noon* και *soon*, οι οποίες έχουν δύο όμικρον (o). Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ είναι αληθής και εξετάζουμε την $P(k+1)$. Για κάθε λέξη που αποτελείται από $k+1$ λέξεις – συνιστώσες, χωρίζουμε τη λέξη σε δύο μέρη που αποτελούνται από k λέξεις – συνιστώσες και 1 λέξη – συνιστώσα. Από την επαγωγική υπόθεση, το μέρος με τις k λέξεις – συνιστώσες έχει άρτιο αριθμό m όμικρον (ο). Το μέρος με τη 1 λέξη – συνιστώσα έχει 2 όμικρον (ο). Επομένως, ο συνολικός αριθμός όμικρον (ο) είναι $m+2$, δηλαδή άρτιος αριθμός. Αυτό επαληθεύει την $P(k+1)$ και ολοκληρώνει την απόδειξη.

β. Έστω $P(n)$ η ιδιότητα ότι οποιαδήποτε λέξη που δημιουργείται από την παράθεση n λέξεων – συνιστωσών έχει άρτιο αριθμό όμικρον (ο). Τότε η $P(1)$ είναι αληθής αφού οι μόνες λέξεις με 1 λέξη – συνιστώσα είναι οι λέξεις *moon*, *noon* και *soon*, οι οποίες έχουν δύο όμικρον (ο). Υποθέτουμε ότι η $P(r)$ είναι αληθής για όλα τα r, $1 \leq r \leq k$, και εξετάζουμε την $P(k+1)$. Για οποιαδήποτε λέξη που αποτελείται από $k+1$ λέξεις – συνιστώσες, χωρίζουμε τη λέξη σε δύο μέρη που αποτελούνται από r_1 και r_2 λέξεις – συνιστώσες, με $1 \leq r_1 \leq k$, $1 \leq r_2 \leq k$ και $r_1 + r_2 = k+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, το μέρος με τις r_1 λέξεις – συνιστώσες περιέχει έναν άρτιο αριθμό m_1 όμικρον (ο) και το μέρος με τις r_2 λέξεις – συνιστώσες περιέχει ένας άρτιο αριθμό m_2 όμικρον (ο). Τότε, η αρχική λέξη περιέχει άρτιο αριθμό $m_1 + m_2$ όμικρον (ο). Αυτό επαληθεύει την $P(k+1)$ και ολοκληρώνει την απόδειξη.

73. Για το βήμα βάσης, ένα παζλ 1 κομματιού απαιτεί 0 βήματα για να συναρμολογηθεί. Υποθέτουμε ότι οποιοδήποτε τμήμα με r κομμάτια, $1 \leq r \leq k$, απαιτεί $r-1$ βήματα για να συναρμολογηθεί. Εξετάζουμε τώρα ένα παζλ με $k+1$ κομμάτια. Το τελευταίο βήμα για τη συναρμολόγηση του παζλ είναι να ταιριάξουμε μαζί δύο τμήματα μεγέθους r_1 και r_2 με $1 \leq r_1 \leq k, 1 \leq r_2 \leq k$ και $r_1 + r_2 = k+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, για τη συναρμολόγηση των τμημάτων αυτών απαιτήθηκαν $r_1 - 1$ και $r_2 - 1$ βήματα, οπότε συμπεριλαμβάνοντας το τελικό βήμα, ο συνολικός αριθμός των βημάτων που απαιτούνται είναι $(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + 1 = (r_1 + r_2) - 1 = k$.

75. Για το βήμα βάσης, ο απλούστερος τέτοιος ο.σ.τ. αποτελείται από μια μεμονωμένη προτασιακή μεταβλητή, οποίος έχει 1 σύμβολο. Το 1 είναι περιττός. Υποθέτουμε ότι για έναν τέτοιο ο.σ.τ. με r σύμβολα, $1 \leq r \leq k$, ο r είναι περιττός. Εξετάζουμε έναν ο.σ.τ. με $k+1$ σύμβολα. Αυτός θα έχει τη μορφή $(P) \wedge (Q), (P) \vee (Q)$ ή $(P) \rightarrow (Q)$ όπου ο P έχει r_1 σύμβολα, $1 \leq r_1 < k$ και ο Q έχει r_2 σύμβολα, $1 \leq r_2 < k$. Από την επαγωγική υπόθεση, οι αριθμοί r_1 και r_2 είναι περιττοί. Τότε, ο αριθμός των συμβόλων στον αρχικό τύπο είναι $r_1 + r_2 + 5$ (τέσσερις παρενθέσεις και ένας σύνδεσμος), ο οποίος είναι περιττός.

77. Οι $P(2)$ και $P(3)$ είναι αληθείς από τις ισότητες $2 = 2$ και $3 = 3$. Υποθέτουμε ότι η $P(r)$ είναι αληθής για οποιονδήποτε αριθμό r, $2 \leq r \leq k$, και εξετάζουμε την $P(k+1)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k+1 \geq 4$, οπότε $(k+1) - 2 \geq 2$ και από την επαγωγική υπόθεση αυτό μπορεί να γραφεί ως άθροισμα αποτελούμενο από 2 και 3. Προσθέτοντας ένα επιπλέον 2 μας δίνει το $k+1$ ως άθροισμα αποτελούμενο από 2 και 3.

79. Οι $P(14), P(15)$ και $P(16)$ είναι αληθείς από τις ισότητες $14 = 2 \cdot 3 + 8$, $15 = 5 \cdot 3$, $16 = 2 \cdot 8$. Υποθέτουμε ότι η $P(r)$ είναι αληθής για οποιονδήποτε αριθμό r, $14 \leq r \leq k$, και εξετάζουμε την $P(k+1)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k+1 \geq 17$, οπότε $(k+1) - 3 \geq 14$ και από την επαγωγική υπόθεση αυτό μπορεί να γραφεί ως άθροισμα αποτελούμενο από 3 και 8. Προσθέτοντας ένα επιπλέον 3 μας δίνει το $k+1$ ως ένα άθροισμα αποτελούμενο από 3 και 8.

81. Οι $P(64), P(65), P(66), P(67)$ και $P(68)$ είναι αληθείς από τις ισότητες $64 = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 17$, $65 = 13 \cdot 5$, $66 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 17$, $67 = 10 \cdot 5 + 17$, $68 = 4 \cdot 17$. Υποθέτουμε ότι η

$P(r)$ είναι αληθής για οποιονδήποτε αριθμό r, $64 \leq r \leq k$, και εξετάζουμε την $P(k+1)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k+1 \geq 69$, οπότε $(k+1)-5 \geq 64$ και από την επαγωγική υπόθεση αυτό μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα αποτελούμενο από 5 και 17. Προσθέτοντας ένα επιπλέον 5 μας δίνει το $k+1$ ως ένα άθροισμα αποτελούμενο από 5 και 17.

83. Από την Άσκηση 2,

$$\sum_{m=1}^{n} 2m = n(n+1) = n^2 + n.$$

Επίσης,

$$\int_0^n 2x\,dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^n = n^2$$

και

$$\int_1^{n+1} 2x\,dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n.$$

Ισχύει ότι $n^2 \leq n^2 + n \leq n^2 + 2n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.3

1. Υποθέτουμε ότι $x_k^2 > x_k + 1$.
Τότε $x_{k+1}^2 = (x_k+1)^2 = x_k^2 + 2x_k + 1 > x_k^2 + 1 > (x_k+1) + 1 = x_{k+1} + 1$.

3. $Q(0)$: $j_0 = (i_0 - 1)!$ επειδή $j = 1, i = 2$ πριν εισέλθουμε στον βρόχο. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $j_k = (i_k - 1)!$
Τότε $Q(k+1)$: $j_{k+1} = j_k \cdot i_k = (i_k - 1)!\, i_k = (i_k)! = (i_{k+1} - 1)!$
Στον τερματισμό του βρόχου, $j = (i-1)!$ και $i = x+1$, οπότε $j = x!$

5. $Q(0)$: $j_0 = x^{i_0}$ επειδή $j = x, i = 1$ πριν εισέλθουμε στον βρόχο. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $j_k = x^{i_k}$. Τότε $Q(k+1)$: $j_{k+1} = j_k \cdot x = x^{i_k} \cdot x = x^{i_k+1} = x^{i_{k+1}}$. Στον τερματισμό του βρόχου, $j = x^i$ και $i = y$, οπότε $j = x^y$.

7. $ΜΚΔ(308, 165) = 11$

9. $ΜΚΔ(735, 90) = 15$

11. $ΜΚΔ(1326, 252) = 6$

13. Θέλετε να μοιράσετε ισόποσα τα 792 σαπούνια σε x πακέτα. Επομένως, το x πρέπει να είναι διαιρέτης του 792. Ομοίως, θέλετε να μοιράσετε ισόποσα τα 400 μπουκάλια σαμπουάν σε x πακέτα. Επομένως, το x πρέπει να είναι διαιρέτης του 400. Ο αριθμός των πακέτων είναι η μεγαλύτερη τιμή του x που διαιρεί ταυτόχρονα το 792 και το 400, που είναι ο ορισμός του $ΜΚΔ(792, 400)$.

15. Q: $j = x * y^i$. $Q(0)$: $j_0 = x * y^{i_0}$ επειδή $j = x, i = 0$ πριν εισέλθουμε στο βρόχο. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $j_k = x * y^{i_k}$. Τότε $Q(k+1)$: $j_{k+1} = j_k * y = x * y^{i_k} * y = x * y^{i_k+1} = x * y^{i_{k+1}}$. Στον τερματισμό του βρόχου, $j = x * y^i$ και $i = n$, οπότε $j = x * y^n$.

17. Q: $j = (i+1)^2$. $Q(0)$: $(i_0+1)^2$ επειδή $j = 4, i = 1$ πριν εισέλθουμε στο βρόχο. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $j_k = (i_k+1)^2$. Τότε $Q(k+1)$: $j_{k+1} = j_k + 2i_k + 3 = (i_k+1)^2 + 2i_k + 3 = i_k^2 + 2i_k + 1 + 2i_k + 3 = i_k^2 + 4i_k + 4 = (i_k+2)^2 = (i_k+1+1)^2 = (i_{k+1}+1)^2$. Στον τερματισμό του βρόχου, $j = (i+1)^2$ και $i = x$, οπότε $j = (x+1)^2$.

19. Q: $j = x * i!$. $Q(0)$: $j_0 = x * i_0!$ επειδή $j = x, i = 1$ πριν εισέλθουμε στο βρόχο. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $j_k = x * (i_k)!$. Τότε $Q(k+1)$: $j_{k+1} = j_k * (i_k + 1) = x *$

$(i_k)!\,(i_k+1) = x * (i_k+1)! = x * (i_{k+1})!$. Στον τερματισμό του βρόχου, $j = x * i!$ και $i = n$, οπότε $j = x * n!$.

21. Q: $j = \max(a[1], \dots, a[i])$. $Q(0)$: $j_0 = \max(a[1], \dots, a[i_0])$ επειδή $i_0 = 1$, οπότε το δεξί μέλος γίνεται $\max(a[1])$ και $j_0 = a[1]$. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $j_k = \max(a[1], \dots, a[i_k])$. Τότε $Q(k+1)$: $j_{k+1} = \max(j_k, a[i_k+1]) = \max(\max(a[1], \dots, a[i_k]), a[i_k+1]) = \max(a[1], \dots, a[i_k+1]) = \max(a[1], \dots, a[i_{k+1}])$. Στον τερματισμό του βρόχου, $j = \max(a[1], \dots, a[i])$ και $i = n$, οπότε $j = \max(a[1], \dots, a[n])$.

23. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραιος δ τέτοιος ώστε $\delta \mid \alpha/2$, $\delta \mid \beta/2$ και $\delta > \gamma$, από το οποίο προκύπτει ότι $2\delta > 2\gamma$. Τότε $\alpha/2 = k_1\delta$ και $\beta/2 = k_2\delta$ όπου k_1, k_2 είναι ακέραιοι. Τότε $\alpha = k_1(2\delta)$ και $\beta = k_2(2\delta)$, που σημαίνει ότι ο 2δ διαιρεί αμφότερους τους α και β αλλά είναι μεγαλύτερος από τον $2\gamma = ΜΚΔ(\alpha, \beta)$, το οποίο αποτελεί αντίφαση.

25. Αν οι α και β είναι αμφότεροι περιττοί, τότε ο $\alpha - \beta$ είναι άρτιος, στην οποία περίπτωση από το γεγονός 2 έχουμε $ΜΚΔ(\alpha - \beta, \beta) = ΜΚΔ\left(\frac{\alpha-\beta}{2}, \beta\right)$.

27.

308	165	Γεγονός 2
154	165	Γεγονός 2
77	165	Γεγονός 3
77	44	Γεγονός 2
77	22	Γεγονός 2
77	11	Γεγονός 3
33	11	Γεγονός 3
11	11	Γεγονός 3
0	11	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2.4

1. $11 = 7 \cdot 308 - 13 \cdot 165$

3. $15 = 1 \cdot 735 - 8 \cdot 90$

5. $6 = 100 \cdot 252 - 19 \cdot 1326$

7. $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$

9. Επειδή $\sqrt{1171} \cong 34$, δοκιμάζουμε τους πρώτους αριθμούς 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31. Κανένας από αυτούς δεν διαιρεί τον n, οπότε ο n είναι πρώτος.

11. $8712 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$

13. $308 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11$ και $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ οπότε $ΜΚΔ(308, 165) = 11$.

15. $735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ και $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ οπότε $ΜΚΔ(735, 90) = 3 \cdot 5 = 15$.

17. $1326 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17$ και $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ οπότε $ΜΚΔ(1326, 252) = 2 \cdot 3 = 6$.

19. Ο $ΜΚΔ(\alpha, \beta)$ είναι το γινόμενο των πρώτων αριθμών που εμφανίζονται σε αμφότερους τους α και β με τον μικρότερο εκθέτη με τον οποίο εμφανίζονται. Το $ΕΚΠ(\alpha, \beta)$ είναι το γινόμενο των πρώτων αριθμών που εμφανίζονται είτε στον α είτε στον β με τον μεγαλύτερο εκθέτη με τον οποίο εμφανίζονται.

21. $ΜΚΔ = 2 \cdot 3 \cdot 11$, $ΕΚΠ = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 13$

23. $ΜΚΔ = 3 \cdot 5 \cdot 11$, $ΕΚΠ = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 17$

25. Έστω $ΜΚΔ(\alpha, \beta) = \gamma$ και $ΜΚΔ(\alpha, \alpha + \beta) = \delta$. Εφόσον $ΜΚΔ(\alpha, \beta) = \gamma$, έχουμε $\gamma \mid \alpha$ και $\gamma \mid \beta$, οπότε $\alpha = m\gamma$ και $\beta = n\gamma$ για κάποιους ακέραιους m και n. Τότε $\alpha + \beta = m\gamma + n\gamma = (m+n)\gamma$, οπότε $\gamma \mid (\alpha + \beta)$. Επομένως, ο γ είναι ένας κοινός διαιρέτης των α και $\alpha + \beta$ και πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των α και

$\alpha + \beta$, δηλαδή τον δ. Εφόσον $MK\Delta(\alpha, \alpha + \beta) = \delta$, έχουμε $\delta \mid \alpha$ και $\delta \mid (\alpha + \beta)$, οπότε $\alpha = i\delta$ και $\alpha + \beta = j\delta$ για κάποιους ακέραιους i και j. Τότε $\beta = j\delta - \alpha = j\delta - i\delta = (j - i)\delta$, οπότε $\delta \mid \beta$. Συνεπώς, ο δ είναι ένας κοινός διαιρέτης των α και β και πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των α και β, δηλαδή τον γ. Τώρα $\gamma \leq \delta$ και $\delta \leq \gamma$, οπότε $\gamma = \delta$.

27. Για παράδειγμα, $8 \mid 24$ και $24 = 12 \cdot 2$ αλλά $8 \nmid 12$ και $8 \nmid 2$. Αυτό δεν παραβιάζει το θεώρημα της διαίρεσης με πρώτους αριθμούς καθώς το 8 δεν είναι πρώτος.

29. 3, 5, 7.

31. $\varphi(8) = 4$ (οι αριθμοί 1, 3 5, 7).

33. $\varphi(10) = 4$ (οι αριθμοί 1, 3, 7, 9).

35. Έστω $\varphi(n) = n - 1$. Εφόσον ο n δεν είναι ποτέ σχετικά πρώτος με τον n, οι αριθμοί που μετριούνται στον $\varphi(n)$ είναι οι $1, 2, \dots, n - 1$. Έτσι κάθε αριθμός μεταξύ των 1 και $n - 1$ είναι σχετικά πρώτος με τον n, οπότε μόνο το 1 και ο n διαιρούν τον n, το οποίο σημαίνει ότι ο n είναι πρώτος.

37. $\varphi(2^4) = 2^3\varphi(2) = 8 \cdot 1 = 8$. Οι αριθμοί είναι: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

39. 35640

41. 1248000

43. Για να υπολογίσουμε το $\varphi(pq)$, μετράμε τον αριθμό των θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον pq, που είναι pq, και αποκλείουμε όσους δεν είναι σχετικά πρώτοι με τον pq. Ένας θετικός ακέραιος m μικρότερος ή ίσος με τον pq και όχι σχετικά πρώτος με τον pq πρέπει είτε να περιέχει τουλάχιστον έναν παράγοντα του p είτε τουλάχιστον έναν παράγοντα του q. Μετράμε πόσα ακέραια πολλαπλάσια του p $(p, 2p, 3p, \dots, pq)$ είναι μικρότερα ή ίσα με τον pq. Ο αριθμός αυτός ισούται με $pq/q = p$. Τα πολλαπλάσια του p και τα πολλαπλάσια του q είναι διακεκριμένα εκτός από το pq, το οποίο έχουμε μετρήσει διπλά. Για να ισοφαρίσουμε, θα προσθέσουμε 1 στο τελικό μέτρημα. Η σωστή έκφραση είναι $\varphi(pq) = pq - q - p + 1 = (p - 1)(q - 1) = \varphi(p)\varphi(q)$.

45. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής, έστω $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ ώστε $n^m = p_1^{n_1 m} p_2^{n_2 m} \dots p_k^{n_k m}$ και από την εξίσωση 2 έχουμε

$$\varphi(n) = p_1^{n_1 - 1} p_2^{n_2 - 1} \dots p_k^{n_k - 1} [\varphi(p_1)\varphi(p_2) \dots \varphi(p_k)]$$

Οπότε, από την εξίσωση 2 ξανά, έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi(n^m) &= p_1^{n_1 m - 1} p_2^{n_2 m - 1} \dots p_k^{n_k m - 1} \varphi(p_1)\varphi(p_2) \dots \varphi(p_k) \\
&= \frac{p_1^{n_1 m} p_2^{n_2 m} \dots p_k^{n_k m}}{p_1 p_2 \dots p_k} \varphi(p_1)\varphi(p_2) \dots \varphi(p_k) \\
&= \frac{p_1^{n_1 m} p_2^{n_2 m} \dots p_k^{n_k m}}{p_1 p_2 \dots p_k} \left(\frac{\varphi(n)}{p_1^{n_1 - 1} p_2^{n_2 - 1} \dots p_k^{n_k - 1}} \right) = \frac{p_1^{n_1 m} p_2^{n_2 m} \dots p_k^{n_k m}}{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}} \varphi(n) \\
&= \frac{n^m}{n} \varphi(n) = n^{m-1}\varphi(n)
\end{aligned}$$

47. 5, 7, 31, 127

49. α. $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

β. $28 = 2^2(2^3 - 1)$

51. Η αρχική λίστα είναι

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Μετά το πρώτο πέρασμα, όπου διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 2) έχουμε:

1	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

Μετά το δεύτερο πέρασμα, όπου διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 3, έχουμε:

1	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

Μετά το τρίτο πέρασμα, όπου διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 5, έχουμε:

1	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

Μετά από το τέταρτο πέρασμα, όπου διαγράφουμε τα πολλαπλάσια του 7, έχουμε:

1	2	3		5		7			

11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

Εφόσον το 7 είναι ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός που είναι μικρότερος από την $\sqrt{100}$, η διαδικασία τερματίζεται. Οι αριθμοί που απομένουν (εκτός το 1) είναι οι πρώτοι αριθμοί που είναι μικρότεροι από το 100.

53.

8	9	5	2	1	7	6	4	3
6	4	7	5	8	3	9	1	2
2	3	1	6	9	4	5	8	7
9	2	4	1	3	5	8	7	6
1	5	8	7	2	6	4	3	9
7	6	3	9	4	8	1	2	5
4	8	2	3	5	9	7	6	1
3	7	9	4	6	1	2	5	8
5	1	6	8	7	2	3	9	4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.1

1. 10, 20, 30, 40, 50.

3. $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$

5. $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

7. 1, 5, 47, 755, 18879

9. 2, 2, 6, 14, 34

11. 2, 3, 6, 18, 108

13. $F(n+1)+F(n-2)=F(n-1)+F(n)+F(n-2)=[F(n-2)+F(n-1)]+F(n)=F(n)+F(n)=2F(n)$.

15. $F(n)=F(n-2)+F(n-1)=[F(n-4)+F(n-3)]+[F(n-3)+F(n-2)]=F(n-4)+2F(n-3)+F(n-2)=F(n-4)+2F(n-3)+[F(n-4)+F(n-3)]=3F(n-3)+2F(n-4)$.

17. $6F(n+3)=F(n+2)+F(n+1)=F(n+1)+F(n)+F(n+1)=2F(n+1)+F(n)$.

19. Για $n=1$: $F(1)=F(3)-1$ ή $1=2-1$, αληθής. Υποθέτουμε ότι είναι αληθής για $n=k$: $F(1)+\cdots+F(k)=F(k+2)-1$. Τότε $F(1)+\cdots+F(k+1)=F(1)+\cdots+F(k)+F(k+1)=F(k+2)-1+F(k+1)=F(k+3)-1$.

21. Για $n=1$: $F(1)=F(2)$ ή $1=1$, αληθής. Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n=k$: $F(1)+F(3)+\cdots+F(2k-1)=F(2k)$. Τότε $F(1)+F(3)+\cdots+F(2(k+1)-1)=F(1)+F(3)+\cdots+F(2k-1)+F(2(k+1)-1)=F(2k)+F(2(k+1)-1)=F(2k)+F(2k+1)=F(2k+2)=F\big(2(k+1)\big)$.

23. Για $n=1$: $F(4)=2F(2)+F(1)$ ή $3=2\cdot 1+1$, αληθής. Για $n=2$: $F(5)=2F(3)+F(2)$ ή $5=2\cdot 2+1$, αληθής. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $r, 1\le r\le k$, $F(r+3)=2F(r+1)+F(r)$. Τότε $F(k+4)=F(k+2)+F(k+3)=2F(k)+F(k-1)+2F(k+1)+F(k)=2[F(k)+F(k+1)]+[F(k-1)+F(k)]=2F(k+2)+F(k+1)$.

25. Για $n=1$: $F(1)<2$ ή $1<2$, αληθής. Για $n=2$: $F(2)<2^2$ ή $1<4$, αληθής. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $r, 1\le r\le k$, $F(r)<2^r$. Τότε $F(k+1)=F(k-1)+F(k)<2^{k-1}+2^k=2^{k-1}(1+2)=3\cdot 2^{k-1}<4\cdot 2^{k-1}=2^2\cdot 2^{k-1}=2^{k+1}$.

27. F(θετικός ακέραιος n)

// διαδικασία που υπολογίζει αναδρομικά την τιμή του n −οστού αριθμού Fibonacci

    αν $n=1$ **τότε**

        επίστρεψε 1

    αλλιώς

        αν $n=2$ **τότε**

            επίστρεψε 1

        αλλιώς

            επίστρεψε $F(n-2)+F(n-1)$

        τέλος αν

    τέλος αν

τέλος συνάρτηση F

29. α. $i=n$

β. $p=F(n-1)$

31. α. $p^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + p$

Η απόδειξη ότι $1 + q = q^2$ είναι παρόμοια.

β. Για $n = 1$: $F(1) = \frac{p-q}{p-q} = 1$, αληθής.

Για $n = 2$: $F(2) = \frac{p^2-q^2}{p-q} = \frac{(p-q)(p+q)}{p-q} = p + q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, αληθής.

Υποθέτουμε ότι για όλα τα $r, 1 \leq r \leq k$, $F(r) = \frac{p^r-q^r}{p-q}$. Τότε

$$F(k+1) = F(k-1) + F(k) = \frac{p^{k-1} - q^{k-1}}{p-q} + \frac{p^k - q^k}{p-q} = \frac{p^{k-1}(1+p) - q^{k-1}(1+q)}{p-q}$$
$$= \frac{p^{k-1}p^2 - q^{k-1}q^2}{p-q} = \frac{p^{k+1} - q^{k+1}}{p-q}$$

γ. Από το ερώτημα (β),

$$F(n) = \frac{p^n - q^n}{p-q} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2(1+\sqrt{5})^n}{2^n(2\sqrt{5})} - \frac{2(1-\sqrt{5})^n}{2^n(2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

33. Ναι.

35. Όχι.

37. α. $F(1) = F(2) = 1$ επειδή τα κουνέλια δεν γεννούν έως ότου γίνουν 2 μηνών. $F(n) =$ ο αριθμός των ζευγαριών στο τέλος του n −οστού μήνα = (ο αριθμός των ζευγαριών στο τέλος του $n-1$ μήνα) + (ο αριθμός των ζευγαριών που παρήχθησαν κατά τη διάρκεια του n −οστού μήνα, τα οποία γεννήθηκαν από τα ζευγάρια που υπήρχαν κατά τον $n-2$ μήνα) $= F(n-1) + F(n-2)$.

β. $27 = 1 + 5 + 21$, $62 = 2 + 5 + 55$.

39. Βήμα βάσης: Οι αριθμοί $S(1), S(2), S(3)$ είναι άρτιοι. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $r, 1 \leq r \leq k$, ο $S(r)$ είναι άρτιος. Τότε, $S(k+1) = 3S(k-2) = 3 \cdot$ (άρτιος) = άρτιος.

41. α. Για $n = 0$: $S(0) = 1$, περιττός. Για $n = 1$: $S(1) = 1$, περιττός. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $r, 1 \leq r \leq k$, ο $S(r)$ είναι περιττός. Τότε, $S(k+1) = 2S(k) + S(k-1) = 2 \cdot$ (περιττός) + περιττός = άρτιος + περιττός = περιττός.

β. Για $n = 4$: $S(4) < 6S(2)$ ή $17 < 6 \cdot 3 = 18$, αληθές. Για $n = 5$: $S(5) < 6S(3)$ ή $41 < 6 \cdot 7 = 42$, αληθές. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $r, 4 \leq r \leq k$, $S(r) < 6S(r-2)$. Τότε, $S(k+1) = 2S(k) + S(k-1) < 2[6S(k-2)] + 6S(k-3) = 6[2S(k-2) + S(k-3)] = 6S(k-1)$.

43. $S(1) = a$, $S(n) = rS(n-1)$ για $n \geq 2$.

45. α. $A(1) = 50.000$, $A(n) = 3A(n-1)$ για $n \geq 2$.

β. 4.

47. β και γ.

49. α, β και ε.

51. Τα στοιχεία βάσης είναι το 0 και το 3, τα οποία και τα δύο είναι πολλαπλάσια του 3. Υποθέτουμε ότι οι x και y είναι ακέραιοι οι οποίοι είναι πολλαπλάσια του 3, οπότε $x = 3n$ και $y = 3k$. Τότε, $x + y = 3n + 3k = 3(n+k)$, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3.

53. (1) Κάθε μονομελές κατηγόρημα του x είναι ο.σ.τ. (2) Αν P, Q είναι μονομελείς κατηγορηματικοί ο.σ.τ. του x, το ίδιο ισχύει για τους $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \to Q), (P'), (P \leftrightarrow Q), (\forall x)P$ και $(\exists x)P$.

55. (1) Ο ακέραιος 1 ανήκει στο σύνολο. (2) Αν ο x είναι περιττός ακέραιος, το ίδιο ισχύει για τους $x + 2$ και $x - 2$.

57. (1) Η συμβολοσειρά 0 ανήκει στο σύνολο. (2) Αν x είναι μια δυαδική συμβολοσειρά με περιττό αριθμό ψηφίων 0, το ίδιο ισχύει για τις $1x, x1$ και $0x0$.

59. (1) Η συμβολοσειρά 0 ανήκει στο σύνολο. (2) Αν x είναι μια δυαδική συμβολοσειρά που τελειώνει σε 0, το ίδιο ισχύει για τις $1x, 0x, x0$.

61. <θετικό ψηφίο>::= 1|2|3|4|5|6|7|8|9, <ψηφίο>::=0|<θετικό ψηφίο>, <θετικός ακέραιος>::=<θετικό ψηφίο>|<θετικός ακέραιος><ψηφίο>

63. (1) $\lambda^R = \lambda$ (2) Αν x είναι μια συμβολοσειρά με έναν μεμονωμένο χαρακτήρα, $x^R = x$. (3) Αν $x = yz$, τότε $x^R = z^R y^R$.

65. $1! = 1,\ n! = n(n-1)!$ για $n \geq 2$.

67. α. $\max(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{αν } a_1 \geq a_2 \\ a_2 & \text{αν } a_1 < a_2 \end{cases}$

$\max(a_1, \dots, a_n) = \max(\max(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ για $n > 2$.

68. β. $\min(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{αν } a_1 \leq a_2 \\ a_2 & \text{αν } a_1 > a_2 \end{cases}$

$\min(a_1, \dots, a_n) = \min(\min(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ για $n > 2$.

69. $A \vee (B_1 \wedge B_2) \Leftrightarrow (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2)$ από την ισοδυναμία 3α.
Υποθέτουμε ότι $A \vee (B_1 \wedge \dots \wedge B_k) \Leftrightarrow (A \vee B_1) \wedge \dots \wedge (A \vee B_k)$. Τότε
$A \vee (B_1 \wedge \dots \wedge B_{k+1}) = A \vee [(B_1 \wedge \dots \wedge B_k) \wedge B_{k+1}]$ από την Άσκηση 68 $\Leftrightarrow \big(A \vee (B_1 \wedge \dots \wedge B_k)\big) \wedge (A \vee B_{k+1}) \Leftrightarrow [(A \vee B_1) \wedge \dots \wedge (A \vee B_k)] \wedge (A \vee B_{k+1}) \Leftrightarrow (A \vee B_1) \wedge \dots \wedge (A \vee B_{k+1})$ από την Άσκηση 68.
Η απόδειξη της άλλης πρότασης είναι παρόμοια.

71.
```
αν n = 1 τότε
        επίστρεψε 1
αλλιώς
        επίστρεψε 3 * S(n − 1)
τέλος αν
```

73.
```
αν n = 1 τότε
        επίστρεψε 1
αλλιώς
        επίστρεψε S(n − 1) + (n − 1)
τέλος αν
```

75.
```
αν n = 1 τότε
        επίστρεψε a
αλλιώς
        αν n = 2 τότε
                επίστρεψε b
        αλλιώς
                επίστρεψε S(n − 2) + S(n − 1)
        τέλος αν
τέλος αν
```

77. $Mystery(n) = n$.

79. Αν η λίστα έχει 1 στοιχείο ή 0 στοιχεία, τότε έχουμε τελειώσει. Ειδάλλως, ανταλλάσσουμε το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο της λίστας και επικαλούμαστε τον αλγόριθμο στη λίστα εκτός του πρώτου και του τελευταίου στοιχείου της.

81. Διαιρούμε το α με τον β. Αν το υπόλοιπο υ είναι 0, τότε $ΜΚΔ(\alpha, \beta) = \beta$. Ειδάλλως, επικαλούμαστε τον αλγόριθμο στους β και υ αντί των α και β.

83. $4, 10, -6, 2, 5$. $4, 5, -6, 2, 10$. $4, 2, -6, 5, 10$. $-6, 2, 4, 5, 10$.

85. New Orleans, Charlotte, Indianapolis.

87. Q: $Τρέχουσα\ τιμή\ = 2^{i-1}$. $Q(0)$: $Τρέχουσα\ τιμή_0 = 2^{i_0-1}$ αληθής επειδή $Τρέχουσα\ τιμή_0 = 2$ και $i_0 = 2$ και $2 = 2^{2-1}$. Υποθέτουμε την $Q(k)$: $Τρέχουσα\ τιμή_k = 2^{i_k-1}$. Τότε $Τρέχουσα\ τιμή_{k+1} = 2 * Τρέχουσα\ τιμή_k = 2 \cdot 2^{i_k-1} = 2^{i_k} = 2^{i_{k+1}-1}$. Στον τερματισμό, $Τρέχουσα\ τιμή = 2^{i-1}$ και $i = n+1$, οπότε $Τρέχουσα\ τιμή = 2^{n+1-1} = 2^n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.2

1. $S(n) = 5n$

3. $F(n) = n2^n$

5. $A(n) = n(n+1)/2$

7. $T(n) = n(n+1)(2n+1)/6$

9. Ο τύπος της λύσης δεν εφαρμόζεται. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ανάπτυγμα, εικασία και επαλήθευση, $F(n) = n!$.

11. Ο τύπος της λύσης δεν εφαρμόζεται. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ανάπτυγμα, εικασία και επαλήθευση, $A(n) = 2^{n-1}(n-1)!$.

13. α. Η αναδρομική σχέση είναι $T(n) = 0{,}95T(n-1)$ με περίπτωση βάσης $T(1) = X$.
β. $T(n) = (0{,}95)^{n-1}(X)$
γ. $T(21) = 0{,}358(X)$, το οποίο είναι λίγο πάνω από το ένα τρίτο της αρχικής ποσότητας X.

15. α. Η αναδρομική σχέση είναι $S(n) = 10S(n-1)$ με περίπτωση βάσης $S(1) = 1000$.
β. $S(n) = 10^{n+2}$
γ. Στο τέλος των 20 δευτερολέπτων (έναρξη του 21ου δευτερολέπτου), στέλνονται $S(21) = 10^{23}$ e-mail.

17. α. Η αναδρομική σχέση είναι $A(n) = (1{,}01)A(n-1) - 80$ με περίπτωση βάσης $A(1) = 5000$.
β. $A(n) = (1{,}01)^{n-1} \cdot 5000 - 80[1 - (1{,}01)^{n-1}]/[1 - 1{,}01]$.
γ. $A(19) = 4.411{,}56$ δολάρια.

19. α. Η αναδρομική σχέση είναι $S(n) = 0{,}98S(n-1) - 10.000$ με περίπτωση βάσης $S(1) = 1.000.000$.
β. $S(n) = (0{,}98)^{n-1} \cdot 1.000.000 - 10.000[1 - (0{,}98)^{n-1}]/[1 - 0{,}98]$.
γ. $S(10) = 750622$.

21. α. Η αναδρομική σχέση για τον συνολικό αριθμό των μολυσμένων μηχανημάτων είναι $T(n) = 6T(n-1) - 6^{n-2}$ με περίπτωση βάσης $T(1) = 3$.
β. $T(n) = 6^{n-2}[6 \cdot 3 - (n-1)]$
γ. Ο ιός εξαφανίζεται μετά από 19 ημέρες.

23. Η αναδρομική σχέση είναι $P(n) = P(n-1) + n$ με $P(1) = 1$. Η λύση είναι $P(n) = n(n+1)/2$.

25. Η αναδρομική σχέση είναι $P(n) = P(n-1) + 3n - 2$ με $P(1) = 1$. Η λύση είναι $P(n) = n(3n-1)/2$.
27. $T(n) = 4 \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}$
29. $S(n) = 2 + 2 \cdot (-2)^{n-1}$
31. $F(n) = 6 + 2 \cdot 5^{n-1}$
33. $B(n) = 3 \cdot 2^{n-1} + 4(n-1) \cdot 2^{n-1}$
35. $A(n) = 4(1+i)^{n-1} + 4(1-i)^{n-1}$
37. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $t^2 - t - 1 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ , \ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Η λύση είναι

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

39. α. Η αναδρομική σχέση είναι $M(n) - M(n-1) = (1/2)[M(n-1) - M(n-2)]$ για $n \geq 3$, με $M(1) = 200.000$, $M(2) = 250.000$. Η λύση είναι $M(n) = 300.000 + (-100.000)(1/2)^{n-1}$.
β. $M(7) = 298.437$ τιμή η οποία βρίσκεται εντός ακτίνας 2.000 δολαρίων από τα 300.000 δολάρια.
41. Έστω $S(n)$ ο αριθμός των δυαδικών συμβολοσειρών μήκους n που δεν έχουν δύο διαδοχικά ψηφία 0. Οι συμβολοσειρές αυτές μπορούν να δημιουργηθούν με δύο τρόπους: (ι) Τοποθετούμε το ψηφίο 1 στο τέλος μιας συμβολοσειράς μήκους $n-1$ η οποία δεν έχει δύο διαδοχικά ψηφία 0. Υπάρχουν $S(n-1)$ τέτοιες συμβολοσειρές. (ιι) Τοποθετούμε τα ψηφία 10 στο τέλος μιας συμβολοσειράς μήκους $n-2$ η οποία δεν έχει δύο διαδοχικά ψηφία 0. Υπάρχουν $S(n-2)$ τέτοιες συμβολοσειρές. Επομένως, $S(n) = S(n-1) + S(n-2)$, η οποία είναι η αναδρομική σχέση των αριθμών Fibonacci. Επίσης $S(1) = 2$ (αμφότερα το 0 και το 1 είναι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 1που δεν έχουν δύο διαδοχικά ψηφία 0), $S(2) = 3$ (01, 10, 11 είναι οι δυαδικές συμβολοσειρές μήκους 2 που δεν έχουν δύο διαδοχικά ψηφία 0). Οπότε, $S(1) = 2 = F(3)$, $S(2) = 3 = F(4)$, $S(3) = S(2) + S(1) = 5 = F(5)$, κ.τ.λ.
43. Εδώ $c_2 = 0$ οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $t^2 - c_1 t = 0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $r_1 = 0, r_2 = c_1$. Η λύση είναι $S(n) = p \cdot 0^{n-1} + q \cdot c_1^{n-1} = q \cdot c_1^{n-1}$ όπου $p + q = S(1)$, $q \cdot c_1 = S(2)$, οπότε $q = S(2)/c_1$. Από την αναδρομική σχέση $S(n) = c_1 S(n-1)$, $S(2)/c_1 = S(1)$, οπότε $q = S(1)$. Η λύση είναι $S(n) = S(1) \cdot c_1^{n-1}$, η οποία είναι η λύση που δίνεται από την εξίσωση 8 αφού $g(n) = 0$.
45. $P(n) = 4n - 3$
47. $S(n) = (1 + \log n)n$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3.3

1. **για** $i = 1$ **έως** n **επανάλαβε**
    $χαμηλός = κατάλογος[i].κουίζ[1]$
    $υψηλός = κατάλογος[i].κουίζ[1]$
    $άθροισμα = κατάλογος[i].κουίζ[1]$
    για $j = 2$ **έως** m **επανάλαβε**
        $άθροισμα = άθροισμα + κατάλογος[i].κουίζ[j]$ //A

```
            αν κατάλογος[i].κουίζ[j] < χαμηλός τότε
                χαμηλός = κατάλογος[i].κουίζ[j]
            τέλος αν
            αν κατάλογος[i].κουίζ[j] > υψηλός τότε
                υψηλός = κατάλογος[i].κουίζ[j]
            τέλος αν
        τέλος επανάληψης
        άθροισμα = άθροισμα − χαμηλός                                  //S
        άθροισμα = άθροισμα + υψηλός                                   //A
        γράψε («Σύνολο για τον μαθητή», i, «είναι», άθροισμα)
    τέλος επανάληψης
```

3. Πραγματοποιούνται συνολικά n^2 προσθέσεις.

5. Ο συνολικός αριθμός των προτάσεων εξόδου είναι $n \log n$.

7. α.

```
παραγοντικό (ακέραιος n)
    ακέραιος i
    παραγοντικό = 1
    αν n = 1 τότε
        επίστρεψε 1
    αλλιώς
        για i = 1 έως n − 1 επανάλαβε
            παραγοντικό = παραγοντικό * (i + 1)
        τέλος επανάληψης
        επίστρεψε παραγοντικό
    τέλος αν
```

9. α. Το c έχει την τιμή 4. Όταν $i = 1$, $γινόμενο = 1 * 4 = 4$, $άθροισμα = -14 + 5 * 4 = 6$. Όταν $i = 2$, $γινόμενο = 4 * 4 = 16$, $άθροισμα = 6 + (-7) * 16 = -106$. Όταν $i = 3$, $γινόμενο = 16 * 4 = 64$, $άθροισμα = -106 + 2 * 64 = 22$, οπότε το 22 είναι η τελική τιμή, η οποία είναι σωστή.

β. Ο συνολικός όγκος εργασίας είναι $3n$.

11. Η καλύτερη περίπτωση προκύπτει όταν για κάθε μαθητή ο πρώτος του βαθμός είναι ο χαμηλότερος βαθμός. Τότε η συνθήκη της πρότασης «**αν**» δεν είναι ποτέ αληθής οπότε η πρόταση εκχώρησης εντός της πρότασης αν εκτελείται 0 φορές. Η χειρότερη περίπτωση προκύπτει όταν για κάθε μαθητή όλοι του οι βαθμοί είναι σε φθίνουσα σειρά από την αρχή μέχρι το τέλος. Τότε κάθε βαθμός είναι μικρότερος από τον προηγούμενο, οπότε η πρόταση εκχώρησης εντός της πρότασης «**αν**» εκτελείται κάθε φορά, δηλαδή $n(m-1)$ φορές. Οι συνολικές εκχωρήσεις και συγκρίσεις στην καλύτερη περίπτωση είναι $3n + 2n(m-1)$ ενώ στη χειρότερη περίπτωση είναι $3n + 3n(m-1)$.

13. α. Μετά το πρώτο πέρασμα, η λίστα είναι 5, 3, 4, 6, 2, 8. Μετά το δεύτερο πέρασμα, η λίστα είναι 3, 4, 5, 2, 6, 8. Μετά το τρίτο πέρασμα, η λίστα είναι 3, 4, 2, 5, 6, 8. Μετά το τέταρτο πέρασμα, λίστα είναι 3, 2, 4, 5, 6, 8. Μετά το πέμπτο πέρασμα, η λίστα είναι 2, 3, 4, 5, 6, 8.

β. $B(1) = 0$, $B(n) = (n-1) + B(n-1)$ για $n \geq 2$.

γ. $B(n) = n(n-1)/2$.

15. Πάντοτε χρειάζονται $n-1$ συγκρίσεις. Κάθε στοιχείο μετά το πρώτο πρέπει να θεωρείται ένα δυνητικό νέο μέγιστο στοιχείο.

17. $S(n) = n(n-1)/2$.

19. α. Η συγχωνευμένη λίστα είναι 1, 4, 5, 6, 8, 9. Απαιτούνται 3 συγκρίσεις.
β. Η συγχωνευμένη λίστα είναι 1, 2, 3, 4, 5, 8. Απαιτούνται 4 συγκρίσεις.
γ. Η συγχωνευμένη λίστα είναι 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10. Απαιτούνται 8 συγκρίσεις.

21. $M(1) = 0$, $M(n) = 2M(n/2) + (n-1)$ για $n = 2^m, n \geq 2$.

23.

	$SelectionSort$	$MergeSort$
$n = 4$	9	5
$n = 8$	35	17
$n = 16$	135	49
$n = 32$	527	129

25. Αρχική λίστα: 9, 8, 3, 13. Μετά το πρώτο πέρασμα: 8, 3, [9], 13. Μετά το δεύτερο πέρασμα: 3, [8], [9], 13. Ταξινομημένη.

27. 6

29. $Q(1) = 0$, $Q(n) = (n-1) + 2Q(n/2)$ για $n \geq 2$.

31. $Q(1) = 0$, $Q(n) = (n-1) + Q(n-1)$ για $n \geq 2$.

33. Αν η αρχική λίστα είναι ταξινομημένη σε αύξουσα σειρά, τότε το πρώτο στοιχείο κάθε υπολίστας είναι το μικρότερο στοιχείο, οπότε για το επόμενο πέρασμα η λίστα των στοιχείων που είναι μικρότερα από το στοιχείο οδηγός θα είναι κενή και η λίστα των στοιχείων που είναι μεγαλύτερα από το στοιχείο οδηγός θα είναι μικρότερη από την υπολίστα κατά ένα μόνο στοιχείο.

35.

Θέση στην οποία εμφανίζεται το x	**Αριθμός συγκρίσεων**
1	1
2	2
3	3
$\vdots$	$\vdots$
n	n

37. Για $m = 1$, $F(m+2) = F(3) = 2$ και $F(m+1) = F(2) = 1$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι αν για την εύρεση του $ΜΚΔ(\alpha, \beta)$ απαιτείται 1 διαίρεση, τότε $\alpha \geq 2$ και $\beta \geq 1$. Εφόσον ο Ευκλείδειος αλγόριθμος εφαρμόζεται σε θετικούς ακέραιους, $\beta \geq 1$. Εφόσον $\alpha > \beta$, $\alpha \geq 2$. Υποθέτουμε ότι αν απαιτούνται k διαιρέσεις, $\alpha \geq F(k+2), \beta \geq F(k+1)$. Αποδεικνύουμε ότι αν απαιτούνται $k+1$ διαιρέσεις, τότε $\alpha \geq F(k+3), \beta \geq F(k+2)$. Το πρώτο βήμα του αλγόριθμου για τον υπολογισμό του $ΜΚΔ(\alpha, \beta)$ είναι η διαίρεση του α με το β, οπότε $\alpha = \pi\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \beta$. Αυτή είναι 1 διαίρεση. Ο αλγόριθμος ολοκληρώνει τον υπολογισμό βρίσκοντας τον $ΜΚΔ(\beta, \upsilon)$, ο οποίος επομένως θα απαιτεί k διαιρέσεις. Από την επαγωγική υπόθεση, $\beta \geq F(k+2)$ και $\upsilon \geq F(k+1)$. Τότε, $\alpha = \pi\beta + \upsilon \geq \beta + \upsilon$ ($\pi \geq 1$ αφού $\alpha > \beta$) $\geq F(k+2) + F(k+1) = F(k+3)$.

39. Από την Άσκηση 38, $\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1} < \alpha$, οπότε παίρνοντας τον λογάριθμο με βάση $\frac{3}{2}$ και στα δύο μέλη, έχουμε $m + 1 < \log_{1,5} \alpha$ ή $m < \left(\log_{1,5} \alpha\right) - 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.1

1. α. Α β. Ψ γ. Ψ δ. Ψ

3. Τέσσερα: $\{2, 3, 4\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ και $2 \leq x \leq 4\} = \{3, 4, 2\}$,
$\{\gamma, \nu, \mu\} = \{x \mid x$ είναι το πρώτο γράμμα της λέξης γάτα, νυχτερίδα ή μήλο$\}$,
$\emptyset = \{x \mid x$ είναι το πρώτο γράμμα της λέξης γάτα, νυχτερίδα και μήλο$\}$,
$\{2, \alpha, 3, \beta, 4, \gamma\}$

5. α. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
β. $\{4, 6, 8, 10\}$
γ. {Washington, Adams, Jefferson}
δ. $\emptyset$
ε. {Maine, Vermont, New Hampshire, Massachusetts, Connecticut, Rhode Island}
στ. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

7. α. $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ και $1 \leq x \leq 5\}$
β. $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ και x είναι περιττός$\}$
γ. $\{x \mid x$ είναι ένας από τους Τρεις Μάγους$\}$
δ. $\{x \mid x$ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος γραμμένος σε δυαδική μορφή$\}$

9. Αν $A = \{x \mid x = 2^n$ όπου n θετικός ακέραιος$\}$, τότε $16 \in A$. Όμως, αν $A = \{x \mid x = 2 + n(n-1)$ όπου n θετικός ακέραιος$\}$, τότε $16 \notin A$. Με άλλα λόγια, δεν δίνονται αρκετές πληροφορίες για να απαντηθεί η ερώτηση.

11. α. Ψ β. Α γ. Ψ δ. Α ε. Α στ. Α

13. Οι προτάσεις (β), (ε) και (ζ) είναι αληθείς. Η (α) είναι ψευδής επειδή $\{1\} \in S$ αλλά $\{1\} \notin R$. Η (γ) είναι ψευδής επειδή $\{1\} \in S$ αλλά $1 \notin S$. Η (δ) είναι ψευδής επειδή το 1 δεν είναι σύνολο (η σωστή πρόταση είναι $\{1\} \subseteq U$). Η (στ) είναι ψευδής επειδή $1 \notin S$.

15. Οι προτάσεις (α), (β), (δ), (ε), (ζ) και (θ) είναι αληθείς. Η (γ) είναι ψευδής επειδή κανένα στοιχείο του C δεν είναι στοιχείο του A. Η (στ) είναι ψευδής επειδή αυτό το συγκεκριμένο σύνολο των 2 στοιχείων δεν είναι στοιχείο του A. Η (η) είναι ψευδής επειδή $a \notin C$.

17. Έστω $(x, y) \in A$. Τότε το (x, y) βρίσκεται εντός απόστασης 3 μονάδων από το $(1, 4)$, οπότε από τον τύπο της απόστασης σημείων, $\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \leq 3$, ή $(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 9$, το οποίο συνεπάγεται ότι $(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 25$, οπότε $(x, y) \in B$. Το σημείο $(6, 4)$ ικανοποιεί την ανισότητα $(x-1)^2 + (y-4)^2 \leq 25$, οπότε $(6, 4) \in B$, αλλά το $(6, 4)$ δεν βρίσκεται εντός απόστασης 3 μονάδων από το $(1, 4)$, οπότε το $(6, 4)$ δεν ανήκει στο A.

19. α. Για $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -24$, η δευτεροβάθμια εξίσωση είναι $x^2 - 2x - 24 = 0$ ή $(x+4)(x-6) = 0$, με λύσεις τους αριθμούς 6 και -4. Αμφότεροι είναι άρτιοι ακέραιοι μεταξύ του -100 και του 100, οπότε ανήκουν στο E.
β. Εδώ $Q = \{6, -4\}$, αλλά $E = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ οπότε $Q \nsubseteq E$.

21. (α), (δ) και (ε).

23. Έστω $x \in A$. Τότε, εφόσον $A \subseteq B$, $x \in B$. Εφόσον $B \subseteq \Gamma$, $x \in \Gamma$. Επομένως, $A \subseteq \Gamma$.

25. Η απόδειξη χρησιμοποιεί μαθηματική επαγωγή. Για $n = 2$: Ένα σύνολο με 2 στοιχεία έχει ακριβώς ένα υποσύνολο με 2 στοιχεία και συγκεκριμένα το ίδιο το σύνολο. Θέτοντας $n = 2$ στον τύπο $\frac{n(n-1)}{2}$ μας δίνει την τιμή 1. Αυτό αποδεικνύει την περίπτωση βάσης. Υποθέτουμε ότι οποιοδήποτε σύνολο με k στοιχεία έχει $\frac{k(k-1)}{2}$ υποσύνολα με ακριβώς 2 στοιχεία. Αποδεικνύουμε ότι οποιοδήποτε σύνολο με $k+1$ στοιχεία έχει $\frac{(k+1)k}{2}$ υποσύνολα με ακριβώς 2 στοιχεία. Έστω x ένα στοιχείο ενός συνόλου με $k+1$ στοιχεία. Απομακρύνοντας προσωρινά το x από το σύνολο παίρνουμε ένα σύνολο με k στοιχεία το οποίο, από την επαγωγική υπόθεση, έχει $\frac{k(k-1)}{2}$ υποσύνολο με ακριβώς 2 στοιχεία. Αυτά είναι όλα τα υποσύνολα με 2 στοιχεία του αρχικού συνόλου που δεν περιέχουν το x. Τα υποσύνολα με 2 στοιχεία του αρχικού συνόλου τα οποία περιλαμβάνουν το x μπορούν να βρεθούν ζευγαρώνοντας διαδοχικά το x με κάθε ένα από τα υπόλοιπα k στοιχεία, παίρνοντας έτσι k υποσύνολα. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των υποσυνόλων με 2 στοιχεία είναι

$$\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{(k+1)k}{2}$$

27. $\mathcal{P}(S)=\{\emptyset,\{\alpha\}\}$.

29. Για το συγκεκριμένο σύνολο των τεσσάρων στοιχείων, το δυναμοσύνολό του θα πρέπει να έχει $2^4=16$ στοιχεία.

$$\mathcal{P}(S)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

31. $\mathcal{P}(S)=\Big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\big\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\big\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\},\big\{\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\},\big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\big\}\Big\}$.

33. $A=\{x,y\}$.

35. Έστω $x\in A$. Τότε $\{x\}\in\mathcal{P}(A)$, οπότε $\{x\}\in\mathcal{P}(B)$ και $x\in B$. Άρα, $A\subseteq B$. Ένα παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύει ότι $B\subseteq A$ έτσι ώστε $A=B$.

37. α. $x=1,\ y=5$ β. $x=8,\ y=7$ γ. $x=1,\ y=4$

39. α. διμελής πράξη
β. Όχι. $0\circ 0\notin\mathbb{N}$, οπότε δεν ισχύει η κλειστότητα.
γ. διμελής πράξη
δ. Όχι. Το $\ln x$ δεν ορίζεται για $x\leq 0$.

41. α. Όχι. Η πράξη δεν ορίζεται για $x=0$.
β. διμελής πράξη
γ. μονομελής πράξη
δ. διμελής πράξη

43. n^n

45. α. $AB+CD-*$ β. $AB**CD*-$ γ. $AC*BCDB*+/+$

47. α. $\{t\}$ β. $\{p,q,r,s,t,u\}$ γ. $\{q,r,v,w\}$ δ. $\emptyset$

49. α. $\{1,2,4,5,6,8,9\}$
β. $\{4,5\}$
γ. $\{2,4\}$
δ. $\{1,2,3,4,5,9\}$
ε. $\{2,6,8\}$
στ. $\{0,1,3,7,9\}$
ζ. $\emptyset$

51. α. $\{\alpha\}$
β. $\big\{\emptyset,\{a\},\{a,\{a\}\}\big\}$

γ. $\Big\{\emptyset, \alpha, \{\alpha\}, \{\{\alpha\}\}, \{\alpha, \{\alpha\}\}\Big\} = S$

δ. $\emptyset$

ε. $\{\alpha, \{\alpha\}\}$

στ. $\Big\{\emptyset, \{\alpha, \{\alpha\}\}\Big\}$

ζ. $\{\emptyset\}$

53. (γ), (ε) και (στ).

55. α. B'

β. $B \cap C$

γ. $A \cap B$

δ. $B' \cap C$

ε. $B' \cap C'$ ή $(B \cup C)'$ ή $B' - C$.

57. α. C'

β. $B \cap D$

γ. $A \cap B$

δ. $A \cap D'$

59. $D \cap R'$

61. $(N \cup P) \cap A$

63. (α), (β), (δ) και (στ).

65. (β) και (γ).

67. α. $B \subseteq A$ β. $A \subseteq B$ γ. $A = \emptyset$ δ. $B \subseteq A$ ε. $A = B$ στ. $A = B$

69. Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$, οπότε $x \in A$.

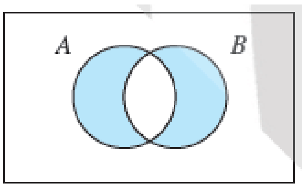
71. Έστω $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Τότε $C \in \mathcal{P}(A)$ και $C \in \mathcal{P}(B)$, το οποίο σημαίνει ότι $C \subseteq A$ και $C \subseteq B$, οπότε $C \subseteq A \cap B$ ή $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Επομένως, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$. Το ίδιο επιχείρημα δουλεύει και αντίστροφα.

73. Υποθέτουμε ότι $B \neq \emptyset$. Έστω $x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ αλλά $x \notin A - B$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την ισότητα των $A \cup B$ και $A - B$.

75. Έστω $x \in C$. Τότε $x \in B - A = B \cap A'$. Επομένως, $x \in A'$ και κανένα στοιχείο που ανήκει στο C δεν μπορεί επίσης να ανήκει στο A, οπότε $A \cap C = \emptyset$.

77. Έστω $A \subseteq B$ και έστω $x \in A$. Τότε $x \in B$, οπότε $x \notin B'$ και κανένα στοιχείο που ανήκει στο A δεν μπορεί επίσης να ανήκει στο B'. Επομένως, $A \cap B' = \emptyset$. Αντιστρόφως, έστω ότι $A \cap B' = \emptyset$ και έστω $x \in A$. Τότε, εφόσον $A \cap B' = \emptyset$, $x \notin B'$, οπότε $x \in B$. Επομένως, οποιοδήποτε στοιχείο του A είναι επίσης στοιχείο του B, δηλαδή $A \subseteq B$.

79. α.



β. $\{2, 4, 6, 7, 9\}$

γ. $x \in (A \cup B) - (A \cap B) \leftrightarrow x \in (A \cup B)$ και $x \in (A \cap B)' \leftrightarrow$
$(x \in A$ ή $x \in B)$ και $x \notin A \cap B \leftrightarrow (x \in A$ και $x \notin A \cap B)$ ή $(x \in B$ και $x \notin A \cap B)$
$\leftrightarrow (x \in A$ και $x \notin B)$ ή $(x \in B$ και $x \notin A) \leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$

81. (1α) $x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A$ ή $x \in B \leftrightarrow x \in B$ ή $x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$.

(1β) $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A$ και $x \in B \leftrightarrow x \in B$ και $x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A$.

(2α) $x \in (A \cup B) \cup \Gamma \leftrightarrow x \in (A \cup B)$ ή $x \in \Gamma \leftrightarrow (x \in A$ ή $x \in B)$ ή $x \in \Gamma \leftrightarrow$

$x \in A$ ή $x \in B$ ή $x \in \Gamma \leftrightarrow x \in A$ ή $(x \in B$ ή $x \in \Gamma) \leftrightarrow x \in A$ ή $x \in (B \cup \Gamma) \leftrightarrow$
$x \in A \cup (B \cup \Gamma)$

(2β) $x \in (A \cap B) \cap \Gamma \leftrightarrow x \in (A \cap B)$ και $x \in \Gamma \leftrightarrow (x \in A$ και $x \in B)$ και $x \in \Gamma \leftrightarrow$
$x \in A$ και $x \in B$ και $x \in \Gamma \leftrightarrow x \in A$ και $(x \in B$ και $x \in \Gamma)$
$x \in A$ και $x \in (B \cap \Gamma) \leftrightarrow x \in A \cap (B \cap \Gamma)$

(3β) $x \in A \cap (B \cup \Gamma) \leftrightarrow x \in A$ και $x \in (B \cup \Gamma) \leftrightarrow x \in A$ και $(x \in B$ ή $x \in \Gamma) \leftrightarrow$
$(x \in A$ και $x \in B)$ ή $(x \in A$ και $x \in \Gamma) \leftrightarrow x \in (A \cap B)$ ή $x \in (A \cap \Gamma)$
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

(4β) $x \in A \cap S \to x \in A$ και $x \in S \to x \in A$. Επίσης, $x \in A \to x \in A$ και $x \in S$ αφού $A \subseteq S \to x \in A \cap S$.

(5α) $x \in A \cup A' \to x \in A$ ή $x \in A' \to x \in S$ ή $x \in S$ αφού $A \subseteq S, A' \subseteq S \to x \in S$.
Επίσης, $x \in S \to (x \in S$ και $x \in A)$ ή $(x \in S$ και $x \notin A) \to x \in A$ ή $x \in A' \to$
$x \in A \cup A'$.

(5β) Για κάθε x τέτοιο ώστε $x \in A \cap A'$, προκύπτει ότι $x \in A$ και $x \in A'$, ή ότι το x ανήκει στο A και το x δεν ανήκει στο A. Αυτό αποτελεί αντίφαση. Κανένα x δεν ανήκει στο $A \cap A'$, δηλαδή $A \cap A' = \emptyset$.

83. α. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B')$ (3α)
$= A \cup \emptyset$ (5β)
$= A$ (4α)

Η δυϊκή είναι $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$.

β. $\big[\big((A \cap C) \cap B\big) \cup \big((A \cap C) \cap B'\big)\big] \cup (A \cap C)'$
$= [(A \cap C) \cap (B \cup B')] \cup (A \cap C)'$ (3β)
$= [(A \cap C) \cap S] \cup (A \cap C)'$ (5β)
$= (A \cap C) \cup (A \cap C)'$ (4β)
$= S$ (5β)

Η δυϊκή είναι $\big[\big((A \cup C) \cup B\big) \cap \big((A \cup C) \cup B'\big)\big] \cap (A \cup C)' = \emptyset$.

γ. $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (C' \cap B)]$
$= (A \cup C) \cap [(B \cap A) \cup (B \cap C')]$ (1β)
$= (A \cup C) \cap [B \cap (A \cup C')]$ (3β)
$= (A \cup C) \cap [(A \cup C') \cap B]$ (1β)
$= [(A \cup C) \cap (A \cup C')] \cap B$ (2β)
$= [A \cup (C \cap C')] \cap B$ (3α)
$= (A \cup \emptyset) \cap B$ (5β)
$= A \cap B$ (4β)

Η δυϊκή είναι $(A \cap C) \cup [(A \cup B) \cap (C' \cup B)] = A \cup B$.

85. α. $A \cap (B \cup A') = (A \cap B) \cup (A \cap A')$ (3β)
$= (A \cap B) \cup \emptyset$ (5β)
$= A \cap B$ (4α)
$= B \cap A$ (1β)

β. $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)
$= C' \cap (A \cup B)$ (1β)
$= (C' \cap A) \cup (C' \cap B)$ (3β)
$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$ (1β)
$= (A - C) \cup (B - C)$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)

γ. $(A - B) - C = (A - B) \cap C'$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)

$= (A \cap B') \cap C'$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)
$= C' \cap (A \cap B')$ (1β)
$= (C' \cap A) \cap B'$ (2β)
$= (A \cap C') \cap B'$ (1β)
$= (A - C) \cap B'$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)
$= (A - C) - B$ (ορισμός της διαφοράς συνόλων)

87. α. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid \text{το } x \text{ ανήκει σε κάποιο } A_i \text{ για } 1 \leq i \leq n\}$.
β. $A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ ή } x \in A_2\}$ για $n = 2$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n$ για $n > 2$.

89. α. $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid \text{το } x \text{ ανήκει σε κάθε } A_i \text{ για } 1 \leq i \leq n\}$.
β. $A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ και } x \in A_2\}$ για $n = 2$, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n$ για $n > 2$.

91. α. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n.
Για $n = 2$, $B \cup (A_1 \cap A_2) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2)$ από την ταυτότητα 3α.
Υποθέτουμε ότι $B \cup (A_1 \cap \ldots \cap A_k) = (B \cup A_1) \cap \ldots \cap (B \cup A_k)$.
Τότε
$B \cup (A_1 \cap \ldots \cap A_{k+1}) = B \cup \big((A_1 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}\big)$ από την άσκηση 89β
$= \big(B \cup (A_1 \cap \ldots \cap A_k)\big) \cap (B \cup A_{k+1})$ από την ταυτότητα 3α
$= \big((B \cup A_1) \cap \ldots \cap (B \cup A_k)\big) \cap (B \cup A_{k+1})$ από την επαγωγική υπόθεση
$= (B \cup A_1) \cap \ldots \cap (B \cup A_{k+1})$ από την άσκηση 89β

β. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο n.
Για $n = 2$, $B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$ από την ταυτότητα 3β.
Υποθέτουμε ότι $B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k) = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_k)$.
Τότε
$B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{k+1}) = B \cap \big((A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}\big)$ από την άσκηση 87β
$= \big(B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_k)\big) \cup (B \cap A_{k+1})$ από την ταυτότητα 3β
$= \big((B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_k)\big) \cup (B \cap A_{k+1})$ από την επαγωγική υπόθεση
$= (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_{k+1})$ από την άσκηση 87β

93. α.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in (-1, 1)\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{0\}$$

β.

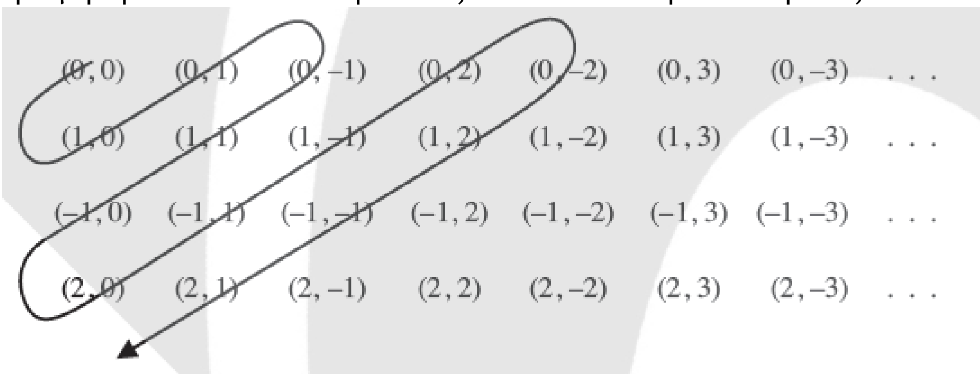
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in [-1, 1]\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{0\}$$

95. Η $P(1)$ είναι αληθής. Κάθε στοιχείο του T είναι μεγαλύτερο από 1, αλλιώς το 1 θα ήταν το μικρότερο στοιχείο του T. Υποθέτουμε ότι η $P(k)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι κάθε στοιχείο του T είναι μεγαλύτερο από k. Εξετάζουμε την $P(k+1)$, δηλαδή ότι κάθε στοιχείο του T είναι μεγαλύτερο από $k+1$. Αν η $P(k+1)$ δεν είναι αληθής, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο του T που είναι μικρότερο ή ίσο με $k+1$. Από την επαγωγική υπόθεση, κάθε στοιχείο του T είναι μεγαλύτερο από k. Επομένως, κάποιο στοιχείο του T ισούται με $k+1$ και αυτό είναι το μικρότερο στοιχείο του T. Αυτό αποτελεί αντίφαση αφού υποθέσαμε ότι το T δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Συνεπώς, η $P(k+1)$ είναι αληθής. Από την πρώτη αρχή της επαγωγής, η $P(n)$ είναι αληθής για όλα τα n και το T πρέπει να είναι κενό. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το T είναι ένα μη κενό σύνολο.

97. Μια απαρίθμηση του συνόλου είναι 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

99. Μια απαρίθμηση του συνόλου είναι $\alpha, \alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha\alpha, \ldots$

101. Μια απαρίθμηση του συνόλου παρουσιάζεται από το παρακάτω βέλος



103. Υποθέτουμε ότι το σύνολο έχει μια απαρίθμηση

$$z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, \ldots$$
$$z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, \ldots$$
$$z_{31}, z_{32}, z_{33}, z_{34}, \ldots$$

Έπειτα κατασκευάζουμε μια άπειρη ακολουθία Z θετικών ακέραιων με $Z = z_1, z_2, z_3, \ldots$ τέτοια ώστε $z_i \neq z_{ii}$ για όλα τα i. Τότε η Z διαφέρει από κάθε ακολουθία της απαρίθμησης, όμως είναι στοιχείο του συνόλου. Αυτό αποτελεί αντίφαση, οπότε το σύνολο είναι μη αριθμήσιμο.

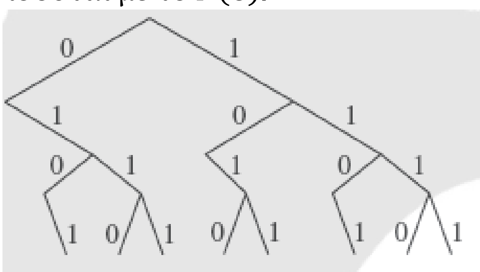
105. Έστω ότι τα A και B είναι απαριθμήσιμα σύνολα με απαριθμήσεις $A = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ και $B = b_1, b_2, b_3, \ldots$. Τότε χρησιμοποιούμε τη λίστα $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ και διαγράφουμε όποια διπλότυπα υπάρχουν. Η λίστα που απομένει θα αποτελεί απαρίθμηση του $A \cup B$, το οποίο συνεπώς είναι απαριθμήσιμο.

107. $B = \{S \mid \text{το } S \text{ είναι σύνολο και } S \notin S\}$. Τότε, είτε $B \in B$ είτε $B \notin B$. Αν $B \in B$, τότε το B έχει την ιδιότητα όλων των στοιχείων του B, δηλαδή $B \notin B$. Άρα, αμφότερα τα $B \in B$ και $B \notin B$ είναι αληθή. Αν $B \notin B$, τότε το B έχει την ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του B, συνεπώς $B \in B$. Επομένως, αμφότερα τα $B \in B$ και $B \notin B$ είναι αληθή.

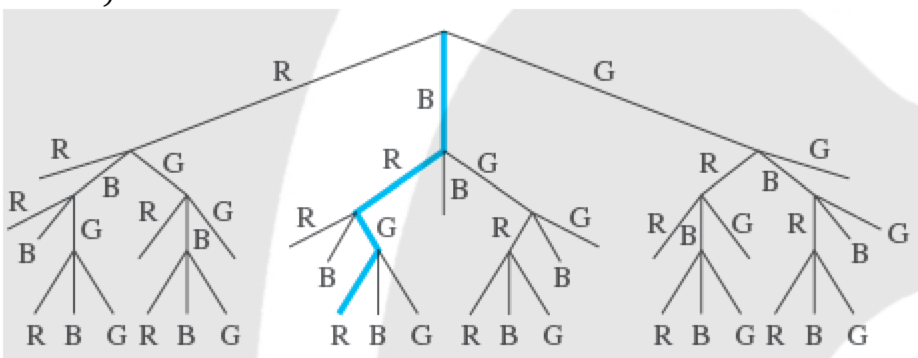
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.2

1. 30
3. 92
5. $26^3 \cdot 10^2$
7. 585
9. 10^9
11. 17.576
13. 16
15. 286
17. 180
19. 1680
21. 25.974.000

23. 917
25. 15
27. 180
29. 720
31. 45
33. 256
35. 192
37. 32
39. 160
41. 8
43. 36
45. 6
47. 25
49. 648
51. 72
53. 36
55. 60.466.176
57. 3.515.625
59. 2704
61. 144
63. 208
65. 96
67. 1104
69. 8 αποτελέσματα το οποίο ισούται με το $F(6)$.



71. 33 τρόποι. Το αποτέλεσμα που έχει υπογραμμιστεί είναι το BRGR (μαύρο, κόκκινο, πράσινο, κόκκινο).



73. Για $m = 2$, το αποτέλεσμα προκύπτει από την αρχή του γινομένου. Υποθέτουμε ότι για $m = k$, υπάρχουν $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ δυνατά αποτελέσματα για την ακολουθία των ενδεχομένων 1 έως k. Έστω $m = k + 1$. Τότε η ακολουθία των ενδεχομένων 1 έως $k + 1$ αποτελείται από την ακολουθία των ενδεχομένων 1 έως k ακολουθούμενη από το ενδεχόμενο $k + 1$.

Από την επαγωγική υπόθεση, η ακολουθία των ενδεχομένων 1 έως k έχει $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ δυνατά αποτελέσματα. Τότε, από την αρχή του γινομένου, η ακολουθία των ενδεχομένων 1 έως k ακολουθούμενη από το ενδεχόμενο $k+1$ έχει $(n_1 \cdot \ldots \cdot n_k) \cdot n_{k+1}$ δυνατά αποτελέσματα, το οποίο ισούται με $n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k+1}$.

75. α. $P(1) = 1$ (τετριμμένη περίπτωση), $P(2) = 1$ (υπάρχει ένας μόνο τρόπος να πολλαπλασιάσουμε 2 παράγοντες). Για $n > 2$, έστω ότι ο τελευταίος πολλαπλασιασμός εμφανίζεται στη θέση k, $1 \le k \le n-1$. Τότε το γινόμενο χωρίζεται σε δύο γινόμενα k και $(n-k)$ παραγόντων, αντίστοιχα, στα οποία μπορούν να μπουν παρενθέσεις με $P(k)$ και $P(n-k)$ τρόπους, αντίστοιχα. Από την αρχή του γινομένου, για ένα σταθερό k υπάρχουν $P(k) \cdot P(n-k)$ τρόποι να μπουν παρενθέσεις. Κάθε τιμή του k δίνει ένα διαφορετικό σύνολο παρενθέσεων, οπότε από την αρχή της άθροισης,

$$P(n) = P(1) \cdot P(n-1) + P(2) \cdot P(n-2) + \cdots + P(n-1) \cdot P(1) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k) \cdot P(n-k)$$

β. Η απόδειξη θα γίνει χρησιμοποιώντας τη δεύτερη αρχή της επαγωγής. $P(1) = 1 = C(0)$, $P(2) = 1 = C(1)$. Υποθέτουμε ότι $P(r) = C(r-1)$ για $1 \le r \le m$. Τότε

$$P(m+1) = \textstyle\sum_{k=1}^{m} P(k) \cdot P(m+1-k) = \sum_{k=1}^{m} C(k-1)C(m-k) = C(m).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.3

1. 19
3. 60
5. 5 εξαρτήματα είχαν και τους τρεις τύπους ελαττωμάτων.
7. α. 2 β. 6
9. α. 39 β. 14
11. 8
13. α. 60 β. 40
15. α.

$$\begin{aligned}&|A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap D| - |B \cap D| - |C \cap D| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\ &\quad - |A \cap B \cap C \cap D|\end{aligned}$$

β. $2^n - 1$
17. 5
19. Όχι
21. 51
23. 367
25. Υπάρχουν 3 ζεύγη (τα 1 και 6, 2 και 5, 3 και 4) που έχουν άθροισμα 7. Κάθε στοιχείο του συνόλου ανήκει σε ένα από αυτά τα ζεύγη. Εφαρμόζουμε την αρχή του περιστερώνα, όπου τα ζεύγη είναι τα δοχεία και οι αριθμοί είναι τα αντικείμενα.
27. Αυτό έπεται από την αρχή του περιστερώνα, όπου τα n δυνατά υπόλοιπα (οι αριθμοί 0 έως $n-1$) είναι το δοχεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.4

1. α. 42 β. 6720
3. 362.880
5. 3.628.800
7. 40.320, 15.120
9. 2730
11. 19!
13. $2! \cdot 11! \cdot 8! = 2 \cdot 39.916.800 \cdot 40.320$
15. 18!
17. α. 120 β. 36 γ. 28
19. $C(300, 25)$
21. $C(17, 5) \cdot C(23, 7)$
23. 11.760
25. 427.518
27. 48
29. 22.308
31. 792
33. 4
35. 624
37. 5.108
39. 54.912
41. 1.098.240
43. 482.320.623.240
45. 11.662.691.040
47. 902.720
49. 495
51. 40
53. 1770
55. 341.149.446
57. 220
59. 115
61. 14.307.150
63. 4.412.826
65. 8.586.820
67. 3003
69. 2508
71. 19.481
73. 36
75. 20
77. α. 3360 β. 420
79. 27.720
81. 21
83. $C(81, 48) =$ πολύ μεγάλος αριθμός
85. α. 28 β. 7 γ. 10
87. α. 8008 β. 84
89. 286
91.

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

και

$$P(n,n-1) = \frac{n!}{\big(n-(n-1)\big)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

93.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,\big(n-(n-r)\big)!} = C(n,n-r)$$

Όταν επιλέγονται r από n αντικείμενα, $n-r$ αντικείμενα δεν επιλέγονται. Επομένως, ο αριθμός των τρόπων να επιλέξουμε r από n αντικείμενα είναι ο ίδιος με τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε $n-r$ από n αντικείμενα.

95. Επιλέγουμε r στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχείων και τα τοποθετούμε στο καλάθι A, έπειτα επιλέγουμε k από τα r αυτά στοιχεία και τα τοποθετούμε στο καλάθι B. Το αριστερό μέλος πολλαπλασιάζει τους αριθμούς των αποτελεσμάτων των δύο αυτών διαδοχικών εργασιών. Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλέξουμε k από n στοιχεία και να τα τοποθετήσουμε στο καλάθι B και έπειτα επιλέγουμε $r-k$ στοιχεία από τα εναπομείναντα $n-k$ και τα τοποθετούμε στο καλάθι A. Το δεξί μέλος πολλαπλασιάζει τον αριθμό των αποτελεσμάτων των δύο αυτών διαδοχικών εργασιών.

97.

$$C(2) = \frac{1}{3}C(4,2) = \frac{1}{3}\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{3\cdot 2} = 2$$
$$C(3) = \frac{1}{4}C(6,3) = \frac{1}{4}\frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 3} = 5$$
$$C(4) = \frac{1}{5}C(8,4) = \frac{1}{5}\frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{5\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 14$$

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα αποτελέσματα της αναδρομικής σχέσης.

99. 163452, 163542, 345621, 356421, 634521, 643125.

101. 7431652. Διαβάζοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά, η πρώτη μη αύξουσα τιμή είναι το 1. Διαβάζοντας ξανά από τα δεξιά προς τα αριστερά, η πρώτη τιμή που είναι μεγαλύτερη από το 1 είναι το 2, οπότε ανταλλάσσουμε το 1 και το 2 και έτσι παίρνουμε 7432651. Από τα δεξιά της τιμής 2, οι αριθμοί φθίνουν. Ανταλλάσσουμε το 6 και το 1 και έτσι παίρνουμε 7432156.

103. 3675421. Διαβάζοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά, η πρώτη μη αύξουσα τιμή είναι το 6. Διαβάζοντας ξανά από τα δεξιά προς τα αριστερά, η πρώτη τιμή που είναι μεγαλύτερη από το 6 είναι το 7, οπότε ανταλλάσσουμε το 6 και το 7 και έτσι παίρνουμε 3765421. Από τα δεξιά της τιμής 7, οι αριθμοί φθίνουν. Ανταλλάσσουμε το 6 και το 1, ανταλλάσσουμε το 5 και το 2 και έτσι παίρνουμε 3712456.

105. 24589, 24678, 24679, 24689, 24789.

107. Θεωρούμε την αρχική μετάθεση να είναι η μεγαλύτερη μετάθεση, $n \ldots 321$. Τότε απλά αντιστρέφουμε όλες τις ανισότητες στο σώμα του αλγόριθμου γεννήτρια μεταθέσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.5

1. α. $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
β. $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$
γ. $a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$
δ. $a^4-16a^3+96a^2-256a+256$

3. $120a^7b^3$

5. $-489.888x^4$

7. $6561y^8$

9. $2560x^3y^2$

11. Θεωρούμε το $(a+b+c)^3$ ως $\big((a+b)+c\big)^3$. Τότε $\big((a+b)+c\big)^3$
$=C(3,0)(a+b)^3+C(3,1)(a+b)^2c+C(3,2)(a+b)c^2+C(3,3)c^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$

13. 11.200

15. $C(n+2,r)=C(n+1,r-1)+C(n+1,r)$ τύπος του Pascal
$=C(n,r-2)+C(n,r-1)+C(n,r-1)+C(n,r)$ τύπος του Pascal ξανά
$=C(n,r)+2C(n,r-1)+C(n,r-2)$

17. Από το διωνυμικό θεώρημα με $a=1, b=-1$ έχουμε:
$$C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-\cdots+(-1)^nC(n,n)=\big(1+(-1)\big)^n=0^n=0.$$

19. Από το διωνυμικό θεώρημα με $a=1, b=2^{-1}$ έχουμε:
$$C(n,0)+C(n,1)2^{-1}+C(n,2)2^{-2}+\cdots+C(n,n)2^{-n}=(1+2^{-1})^n$$
οπότε, πολλαπλασιάζοντας με 2^n, παίρνουμε
$$C(n,0)2^n+C(n,1)2^{n-1}+C(n,2)2^{n-2}+\cdots+C(n,n)2^{n-n}=2^n(1+2^{-1})^n$$
ή
$$C(n,0)2^n+C(n,1)2^{n-1}+C(n,2)2^{n-2}+\cdots+C(n,n)=$$
$$2^n\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=2^n\left(\frac{2+1}{2}\right)^n=2^n\left(\frac{3^n}{2^n}\right)=3^n.$$

21. α. $(1+x)^n=C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+C(n,3)x^3+\cdots+C(n,n)x^n$
β. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας του ερωτήματος (α) παίρνουμε
$$n(1+x)^{n-1}=C(n,1)+2C(n,2)x+3C(n,3)x^2+\cdots+nC(n,n)x^{n-1}$$
γ. έπεται από το ερώτημα (β) με $x=1$.
δ. έπεται από το ερώτημα (β) με $x=-1$.

23. α. Από όλες τις τομές m συνόλων, $1\le m\le k$, θέλουμε αυτές που επιλέγουν όλα τα m σύνολα από τα k σύνολα του B. Υπάρχουν $C(m,k)$ τρόποι για να το κάνουμε αυτό.
β. Για κάθε τιμή του m, $1\le m\le k$, μια τομή m συνόλων έχει $C(k,m)$ που περιλαμβάνουν μόνο σύνολα του B. Μετρώντας τις τομές στο δεξί μέλος της (1) που περιέχουν το x (τομές με ένα σύνολο, τομές με 2 σύνολα, και ούτω καθεξής) παίρνουμε $C(k,1)-C(k,2)+C(k,3)-\cdots+(-1)^{k+1}C(k,k)$.
γ. Από την άσκηση 17, $C(k,0)-C(k,1)+C(k,2)-\cdots+(-1)^kC(k,k)=0$ ή $C(k,1)-C(k,2)+\cdots+(-1)^{k+1}C(k,k)=C(k,0)$, αλλά $C(k,0)=1$. Επομένως, το x μετριέται μόνο μία φορά στο δεξί μέλος της (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4.6

Μερικές δεκαδικές απαντήσεις σε αυτή την παράγραφο είναι προσεγγιστικές.

1. 8

3. 1/8
5. 1/4
7. 36
9. 1/6
11. 1/6
13. 1/12
15. 8
17. 1/8
19. 1/4
21. 1/52
23. 1/2
25. 1326
27. $\cong 0{,}5588$
29. $\cong 0{,}3824$
31. $\cong 0{,}0498$
33. $\cong 0{,}0023$
35. Η απάντηση στην άσκηση 30 θα πρέπει να είναι το άθροισμα των απαντήσεων στις ασκήσεις 28 και 29 αφού «τουλάχιστον ένα μπαστούνι» είναι είτε ακριβώς ένα μπαστούνι (άσκηση 29) είτε δύο μπαστούνια (άσκηση 28). Χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες που βρήκαμε, η αριθμητική αυτή πράξη επαληθεύεται.
37. α. 1000 β. 0,001 γ. 0,006 δ. 0,003
39. α. 69.090.840 β. $\cong 0{,}0000017$ γ. $\cong 0{,}000295$ δ. $\cong 0{,}0097$
41. $\cong 0{,}0000015$
43. $\cong 0{,}0002$
45. $\cong 0{,}002$
47. $\cong 0{,}021$
49. $\cong 0{,}423$
51. 365^n
53. $B = E'$, οπότε από την άσκηση 52, $P(B) = 1 - P(E) = 1 - P(365, n)/365^n$.
55. Το B έχει μεγαλύτερη πιθανότητα επειδή το B αποτελείται από ακριβώς δύο $+$ ακριβώς τρία $+ \ldots +$ ακριβώς n άτομα που μοιράζονται την ίδια ημέρα γενεθλίων, ενώ το C αποτελείται από ακριβώς δύο.
57. 38
59. $\cong 0{,}026$
61. $\cong 0{,}105$
63. $\cong 0{,}00000751$
65. $6{,}29908E - 12$
67. α. 0,55 β. 0,68 γ. 0,32
69. α. 0,6 β. 0,25 γ. 0,65 δ. 0,15 ε. 0,95
71. $\cong 0{,}93$
73. α. $\cong 0{,}24$ β. 0,43 γ. 0,57
75. 0,25
77. 0,3125
79. 0,5
81. 0,5
83. 0,375

85. 0,875
87. 0,5
89. α.

$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)} \qquad (1)$$

$$P(F \mid E_i) = \frac{P(F \cap E_i)}{P(E_i)} \qquad \text{ή} \qquad P(F \cap E_i) = P(F \mid E_i)P(E_i) \qquad (2)$$

Εφόσον $P(F \cap E_i) = P(E_i \cap F)$, αντικαθιστούμε από την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1), παίρνοντας

$$P(E_i \mid F) = \frac{P(F \mid E_i)P(E_i)}{P(F)}$$

β. Τα ενδεχόμενα $E_i,\ 1 \leq i \leq n$, είναι όλα ξένα μεταξύ τους. Επομένως, τα ενδεχόμενα $F \cap E_i,\ 1 \leq i \leq n$ είναι όλα ξένα μεταξύ τους.
$F = F \cap S = F \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_n)$.
Εφόσον η πιθανότητα της ένωσης ξένων ενδεχομένων είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων,

$$P(F) = \sum_{k=1}^{n} P(F \cap E_k)$$

γ. Από την εξίσωση (2) του ερωτήματος (α), $P(F \cap E_i) = P(F \mid E_i)P(E_i)$. Αντικαθιστώντας στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) παίρνουμε

$$P(F) = \sum_{k=1}^{n} P(F \mid E_k)P(E_k)$$

δ. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ) στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) παίρνουμε

$$P(E_i \mid F) = \frac{P(F \mid E_i)P(E_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(F \mid E_k)P(E_k)}$$

91. $\cong$ 0,40
93. α. 3,5 β. $\cong$ 3,29
γ. Μικρότερη (το οποίο αποδεικνύεται αληθές, $3{,}29 < 3{,}5$). Ο λόγος είναι ότι το ζάρι σταθμίζεται προς μία μικρότερη τιμή από την προηγούμενη αναμενόμενη τιμή, οπότε αυτή η μικρότερη τιμή είναι πιο πιθανό να προκύψει και θα τραβήξει προς τα κάτω τη σταθμισμένη μέση τιμή.
95. 4,75
97. α. $\cong$ 0,904 β. $\cong$ 0,999 γ. $\cong$ 0,096
99. $\cong$ 0,547
101.

$$\frac{n^2 + 3n}{2(n+1)}$$

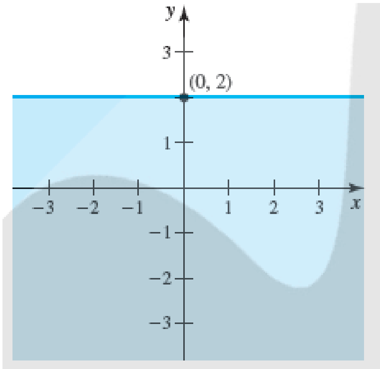
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.1

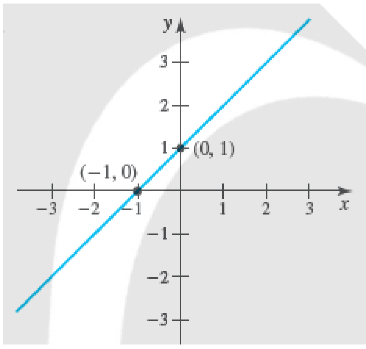
1. α. $(1,3),(3,3)$
β. $(4,2),(5,3)$
γ. $(5,0),(2,2)$
δ. $(1,1),(3,9)$

3. α. $(1,-1),(-3,3)$
β. $(19,7),(41,16)$
γ. $(-3,-5),(-4,1/2),(1/2,1/3)$
δ. $\big((1,2),(3,2)\big)$

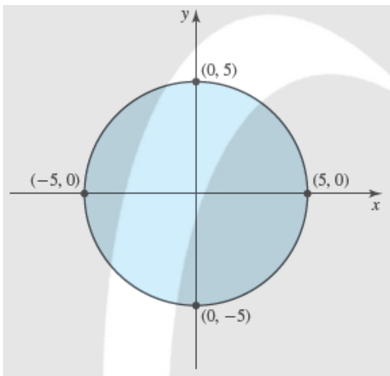
5. α.



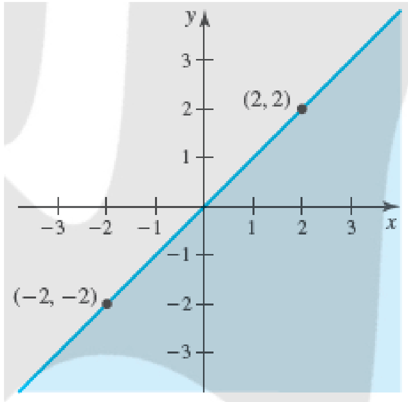
β.



γ.



δ.



7. α. πολλά προς πολλά
β. πολλά προς ένα
γ. ένα προς ένα
δ. ένα προς πολλά

9. α. $(2,6), (3,17), (0,0)$
β. $(2,12)$
γ. κανένα
δ. $(1,1), (4,8)$

11. α. ανακλαστική
β. ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική
γ. καμία
δ. αντισυμμετρική, μεταβατική

13. α. ανακλαστική, μεταβατική
β. ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική
γ. συμμετρική
δ. μεταβατική
ε. ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική

15. (β). Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}, [1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$ και $[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$.
(ε). Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι σύνολα που αποτελούνται από τετράγωνα με πλευρές ίσου μήκους.

17. α. συμμετρική
β. αντισυμμετρική, μεταβατική
γ. ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική
δ. ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική

19. α. ανακλαστική, μεταβατική
β. αντισυμμετρική, μεταβατική
γ. ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική
δ. αντισυμμετρική

21. Για παράδειγμα:
α. $S =$ το σύνολο όλων των ευθειών στο επίπεδο, $x \,\rho\, y \leftrightarrow$ η x ταυτίζεται με την y ή η x είναι κάθετη με την y.
β. $S =$ το σύνολο των ακέραιων αριθμών, $x \,\rho\, y \leftrightarrow\ x^2 \leq y^2$.
γ. $S =$ το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών, $x \,\rho\, y \leftrightarrow\ x < y$.
δ. $S =$ το σύνολο των ακέραιων αριθμών, $x \,\rho\, y \leftrightarrow\ x \leq |y|$.

23. α. Η ανακλαστική κλειστότητα είναι η ίδια η ρ, για τη συμμετρική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,1),(3,2)$, για τη μεταβατική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,1),(3,2)$.

β. Η ανακλαστική κλειστότητα, η συμμετρική κλειστότητα και η μεταβατική κλειστότητα είναι η ίδια η ρ.

γ. Για την ανακλαστική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,2),(3,3)$, για τη συμμετρική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,1),(3,2)$, για τη μεταβατική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(1,1),(2,1),(2,2),(3,3)$.

δ. Για την ανακλαστική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,2),(3,3)$, για τη συμμετρική κλειστότητα προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,1),(3,2),(3,1)$, η μεταβατική κλειστότητα είναι η ίδια η ρ.

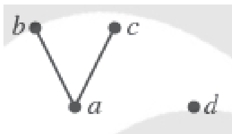
25. $x\ \rho^*\ y \leftrightarrow$ κάποιος μπορεί να πετάξει από την πόλη x στην πόλη y (με πολλαπλές ίσως πτήσεις) με τις αερογραμμές Take-Your-Chance.

27. Όχι. Αν η σχέση είναι μη ανακλαστική, τότε ισούται με τη μη ανακλαστική της κλειστότητα. Αν η σχέση δεν είναι μη ανακλαστική, τότε θα πρέπει να υπάρχει κάποιο $x \in S$ με το (x,x) να ανήκει στη σχέση. Επεκτείνοντας τη σχέση, δεν θα απομακρύνουμε αυτό το ζεύγος, οπότε καμία επέκταση της σχέσης δεν μπορεί να είναι μη ανακλαστική.

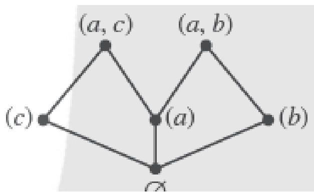
29. 2^{n^2}

31. α.

β.



γ.

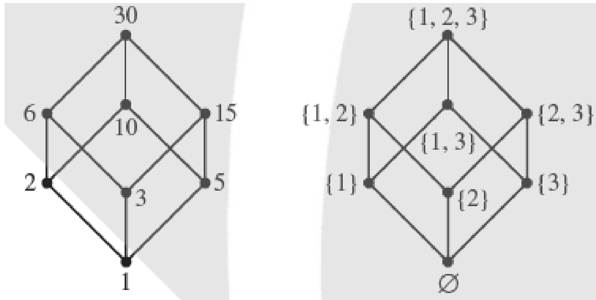


33. Ανακλαστική ιδιότητα: Αν $x \in A$, τότε $x \in S$, οπότε $(x \preccurlyeq x)$ επειδή η $\preccurlyeq$ είναι μια ανακλαστική σχέση στο S.

Συμμετρία: Αν $x, y \in A$ και $x \preccurlyeq y$, τότε $x, y \in S$ και $x \preccurlyeq y$, οπότε $y \preccurlyeq x$ επειδή η $\preccurlyeq$ είναι συμμετρική στο S.

Μεταβατικότητα: Αν $x, y, z \in A$ και $x \preccurlyeq y$ και $y \preccurlyeq z$, τότε $x, y, z \in S$, $x \preccurlyeq y$ και $y \preccurlyeq z$, οπότε $x \preccurlyeq z$ επειδή η $\preccurlyeq$ είναι μεταβατική στο S.

35.



Τα δύο γραφήματα είναι ταυτοτικά ως προς τη δομή τους.

37. Ανακλαστική ιδιότητα: $(s_1, t_1)\ \mu\ (s_1, t_1)$ αφού ισχύουν αμφότερα τα $s_1\ \rho\ s_1$ και $t_1\ \sigma\ t_1$ λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας των ρ και σ.

Αντισυμμετρική ιδιότητα: $(s_1, t_1)\ \mu\ (s_2, t_2)$ και $(s_2, t_2)\ \mu\ (s_1, t_1) \to s_1\ \rho\ s_2$ και $s_2\ \rho\ s_1$, $t_1\ \sigma\ t_2$ και $t_1\ \sigma\ t_1 \to s_1 = s_2$ και $t_1 = t_2$ λόγω της αντισυμμετρικής ιδιότητας των ρ και $\sigma \to (s_1, t_1) = (s_2, t_2)$.

Μεταβατική ιδιότητα: $(s_1, t_1)\ \mu\ (s_2, t_2)$ και $(s_2, t_2)\ \mu\ (s_3, t_3) \to s_1\ \rho\ s_2$ και $s_2\ \rho\ s_3$, $t_1\ \sigma\ t_2$ και $t_2\ \sigma\ t_3 \to s_1\ \rho\ s_3$ και $t_1\ \sigma\ t_3$ λόγω της μεταβατικής ιδιότητας των ρ και $\sigma \to (s_1, t_1)\ \mu\ (s_3, t_3)$.

39. Υποθέτουμε ότι η σχέση ρ είναι ανακλαστική και μεταβατική στο S. Τότε για όλα τα $x \in S$, $(x, x) \in \rho$, το οποίο σημαίνει ότι $(x, x) \in \rho^{-1}$, οπότε $(x, x) \in \rho \cap \rho^{-1}$ και η σχέση $\rho \cap \rho^{-1}$ είναι ανακλαστική. Έστω $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Τότε $(x, y) \in \rho$ και $(x, y) \in \rho^{-1}$, το οποίο σημαίνει ότι $(x, y) \in \rho$ και $(y, x) \in \rho$. Αυτό συνεπάγεται ότι $(y, x) \in \rho^{-1}$ και $(y, x) \in \rho$, οπότε $(y, x) \in \rho \cap \rho^{-1}$ και η σχέση $\rho \cap \rho^{-1}$ είναι συμμετρική. Έστω $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$ και $(y, z) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Τότε $(x, y) \in \rho$ και $(x, y) \in \rho^{-1}$ και $(y, z) \in \rho$ και $(y, z) \in \rho^{-1}$, οπότε $(x, y) \in \rho$ και $(y, x) \in \rho$ και $(y, z) \in \rho$ και $(z, y) \in \rho$. Εφόσον η ρ είναι μεταβατική, $(x, z) \in \rho$ και $(z, x) \in \rho$ ή $(x, z) \in \rho$ και $(x, z) \in \rho^{-1}$, οπότε $(x, z) \in \rho \cap \rho^{-1}$ και η σχέση $\rho \cap \rho^{-1}$ είναι μεταβατική.

41. Ανακλαστική ιδιότητα: $X \preccurlyeq X$ αφού $x_i = x_i, 1 \le i \le k$.

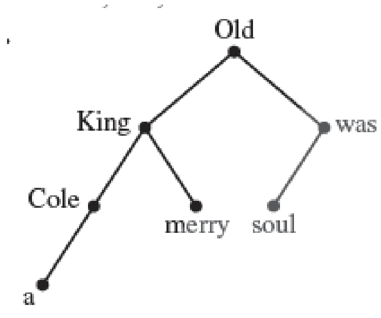
Αντισυμμετρική ιδιότητα: Έστω $X \preccurlyeq Y$ και $Y \preccurlyeq X$. Αν $X \ne Y$, έστω $m + 1$ να είναι ο πρώτης δείκτης για τον οποίο $x_{m+1} \ne y_{m+1}$. Τότε $x_{m+1} \preccurlyeq y_{m+1}$ και $y_{m+1} \preccurlyeq x_{m+1} \to x_{m+1} = y_{m+1}$, το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Μεταβατική ιδιότητα: Έστω $X \preccurlyeq Y$ και $Y \preccurlyeq Z$. Τότε $x_p \preccurlyeq y_p$ για κάποιο $p \le k$ και $y_q \preccurlyeq z_q$ για κάποιο $q \le k$. Έστω $m = (p, q)$. Τότε $x_m \preccurlyeq z_m$ και $X \preccurlyeq Z$.

Επομένως, η σχέση $\preccurlyeq$ είναι μερική διάταξη. Είναι ολική διάταξη από την περίπτωση «αλλιώς».

43. α. when. κανένα. Όλα εκτός το τελευταίο.

β.



Μεγιστικά στοιχεία: a, merry, soul.

45. α. $[a] = \{a, c\} = [c]$

β. $[3]=\{1,2,3\},\ [4]=\{4,5\}$

47. $[1]=\{\dots,-5,-3,-1,1,3,5,\dots\}$

49. Αν $x\equiv y\ (mod\ n)$ τότε $x-y=k_1n$ για κάποιον ακέραιο k_1, ή $x=k_1n+y$. Αν $z\equiv w\ (mod\ n)$ τότε $z-w=k_2n$ για κάποιον ακέραιο k_2, ή $z=k_2n+w$.

α. $x+z=(k_1n+y)+(k_2n+w)=y+w+(k_1+k_2)n$, οπότε $x+z-(y+w)=(k_1+k_2)n$ όπου ο k_1+k_2 είναι ακέραιος, άρα $x+z\equiv y+w\ (mod\ n)$.

β. $x-z=(k_1n+y)-(k_2n+w)=y-w+(k_1-k_2)n$, οπότε $x-z-(y-w)=(k_1-k_2)n$ όπου ο k_1-k_2 είναι ακέραιος, άρα $x-z\equiv y-w\ (mod\ n)$.

γ. $xz=(k_1n+y)(k_2n+w)=k_1k_2n^2+yk_2n+wk_1n+yw=(k_1k_2n+yk_2+wk_1)n+yw$ οπότε $xz-yw=(k_1k_2n+yk_2+wk_1)n$ όπου ο $k_1k_2n+yk_2+wk_1$ είναι ακέραιος, άρα $xz\equiv yw\ (mod\ n)$.

δ.

$$x^s-y^s=(k_1n+y)^s-y^s=\left[\sum_{k=0}^{s} C(s,k)(k_1n)^{s-k}y^k\right]-y^s$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{s-1} C(s,k)(k_1n)^{s-k}y^k\right]+y^s-y^s=n\sum_{k=0}^{s-1} C(s,k)k_1^{s-k}n^{s-k-1}y^k=nk_2$$

όπου ο k_2 είναι ακέραιος, άρα $x^s\equiv y^s\ (mod\ n)$.

51. α. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

β. $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),(d,e),(e,d)\}$

53. Ανακλαστική ιδιότητα: $x^2-x^2=0$, ο οποίος είναι άρτιος.

Συμμετρική ιδιότητα: Αν $x^2-y^2=2n$, τότε $y^2-x^2=-2n$, ο οποίος είναι άρτιος.

Μεταβατική ιδιότητα: Αν $x^2-y^2=2n$ και $y^2-z^2=2m$, τότε $x^2-z^2=x^2-y^2+y^2-z^2=2n+2m=2(n+m)$, ο οποίος είναι άρτιος.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι το σύνολο των άρτιων ακέραιων και το σύνολο των περιττών ακέραιων.

55. Ανακλαστική ιδιότητα: $(x,y)\ \rho\ (x,y)$ αφού $y=y$.

Συμμετρική ιδιότητα: Αν $(x,y)\ \rho\ (z,w)$, τότε $y=w$ οπότε $w=y$ και $(z,w)\ \rho\ (x,y)$.

Μεταβατική ιδιότητα: Αν $(x,y)\ \rho\ (z,w)$ και $(z,w)\ \rho\ (s,t)$, τότε $y=w$ και $w=t$, οπότε $y=t$ και $(x,y)\ \rho\ (s,t)$.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι σύνολα διατεταγμένων ζευγών με ίδιες δεύτερες συνιστώσες.

57. α. Ανακλαστική ιδιότητα: $x\ \rho\ x$ αφού οι συμβολοσειρές x και x αρχίζουν και τελειώνουν με την ίδια τιμή bit. Συμμετρική ιδιότητα: Αν $x\ \rho\ y$, τότε η y αρχίζει και τελειώνει με τις ίδιες τιμές bit όπως η x, οπότε και η x αρχίζει και τελειώνει με τις ίδιες τιμές bit όπως η y και συνεπώς $y\ \rho\ x$. Μεταβατική ιδιότητα: Αν $x\ \rho\ y$ και $y\ \rho\ z$, τότε η y αρχίζει και τελειώνει με τις ίδιες τιμές bit όπως η x και η z αρχίζει και τελειώνει με τις ίδιες τιμές bit όπως η y, οπότε η z αρχίζει και τελειώνει με τις ίδιες τιμές bit όπως η x και συνεπώς $x\ \rho\ z$.

β. 256

γ. 4. Υπάρχουν τέσσερις συνδυασμοί bit που μπορεί να αρχίζει και να τελειώνει μια συμβολοσειρά, οι 0…0, 1…0, 0…1 και 1…1.

δ. 2^6

59. Προφανώς, $P\leftrightarrow P$ είναι ταυτολογία.

Αν $P \leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία, τότε οι P και Q έχουν παντού τις ίδιες τιμές αληθείας, οπότε $Q \leftrightarrow P$ είναι ταυτολογία.

Αν οι $P \leftrightarrow Q$ και $Q \leftrightarrow R$ είναι ταυτολογίες, τότε οι P, Q και R έχουν παντού τις ίδιες τιμές αληθείας, οπότε $P \leftrightarrow R$ είναι ταυτολογία.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι σύνολα που αποτελούνται από ο.σ.τ. που έχουν παντού τις ίδιες τιμές αληθείας.

61. α. 1 β. 2 γ. 5 δ. 15

63. Οι απαντήσεις συμφωνούν με την άσκηση 61.

65. Α. 3 β. 7

67. Οι απαντήσεις συμφωνούν με την άσκηση 65.

69. Ο αριθμός των τμημάτων μιας διαμέρισης μπορεί να ποικίλει από 1 (ολόκληρο το σύνολο) έως n (ένα μεμονωμένο στοιχείο σε κάθε τμήμα). Το αποτέλεσμα προκύπτει από τον ορισμό του $S(n, k)$ και την αρχή της άθροισης.

71. 6

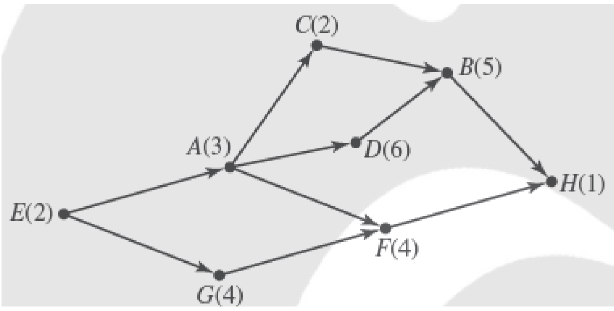
73. α. 25, 49 β. $(3, 4, 5), (0, 5, 5), (8, 6, 10)$ γ. $(-4, 4, 2, 0), (-6, 6, 0, -2)$

75. 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.2

1. Ναι. Για παράδειγμα: 1, 2, 3, 8, 4, 5, 6, 7, 9.

3.



5. Ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης είναι 17 χρονικές μονάδες. Το κρίσιμο μονοπάτι είναι: E, A, D, B, H.

7. Ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης είναι 13 χρονικές μονάδες. Το κρίσιμο μονοπάτι είναι: E, A, C, B, H.

9. Για παράδειγμα: G, H, F, D, E, C, A, B.

11. Για παράδειγμα: E, A, C, D, G, F, B, H.

13. Για παράδειγμα: 6, 9, 1, 7, 8, 11, 2, 3, 5, 10, 4.

15. Για παράδειγμα: 5, 6, 4, 1, 2, 3, 7, 10, 8, 11, 9.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.3

1. α. Δώστε το όνομα, τον τύπο και τη ράτσα όλων των κατοικίδιων που είναι γάτες.

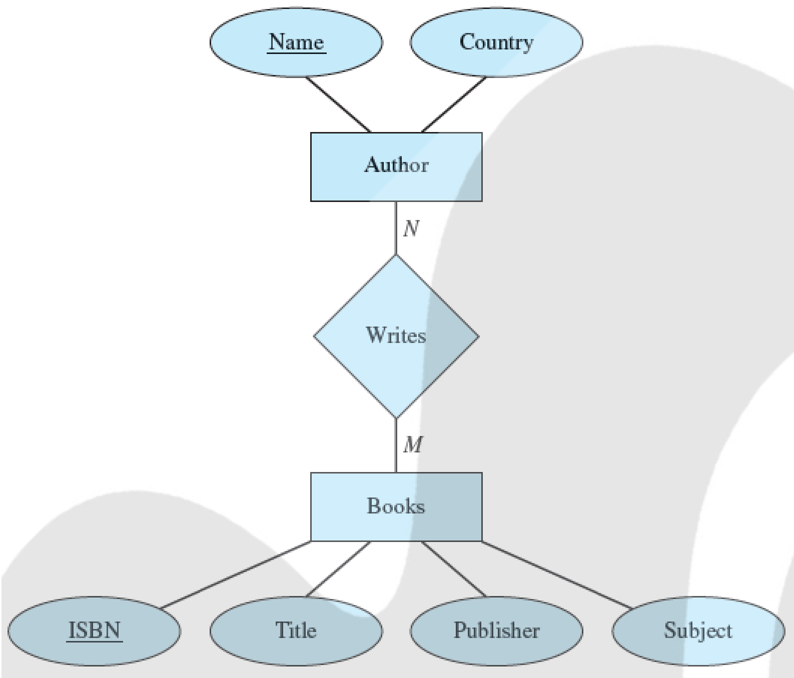
β. 2

γ. **SELECT** Όνομα Κατοικίδιου, Τύπος Κατοικίδιου, Ράτσα **FROM** Κατοικίδιο **WHERE** Τύπος Κατοικίδιου = «Γάτα».

3.

Ποιος Είμαι	
Όνομα Κατοικίδιου	**Ράτσα**
Spot	Hound
Twinkles	Siamese
Lad	Collie
Lassie	Collie
Mohawk	Morish idol
Tweetie	Canary
Tiger	Shorthair

5.



Όνομα, Χώρα
Συγγραφέας
Γράφει
Βιβλία
ISBN, Τίτλος, Εκδότης, Αντικείμενο

Η σχέση «γράφει» είναι πολλά προς πολλά, δηλαδή ένας συγγραφέας μπορεί να γράψει πολλά βιβλία και ένα βιβλίο μπορεί να έχει περισσότερους από έναν συγγραφείς.

7.

Αποτελέσματα_7

Όνομα	Χώρα
East, Jane	Η.Π.Α
Kovalsco, Bert	Η.Π.Α

9.

Αποτελέσματα_9			
ISBN	**Τίτλος**	**Εκδότης**	**Αντικείμενο**
0-364-87547-X	Early Tang Paintings	Bellman	Τέχνη
0-56-000142-8	Springtime Gardening	Swift-Key	Φύση

11.

Αποτελέσματα_11
Όνομα
Chan, Jimmy
East, Jane
King, Dorothy
Kovalsco, Bert
Lau, Won
Nkoma, Jon
Quercos, Tom

13.

Αποτελέσματα_13	
Εκδότης	**Αντικείμενο**
Bellman	Τέχνη
Harding	Τέχνη
Harding	Φύση
Loraine	Φύση
Swift-Key	Φύση

Σε κάποια συστήματα βάσεων δεδομένων πρέπει να καθορίσετε, μέσω κάποιας πρότασης «DISTINCT» ή κάποιας ιδιότητας «Μοναδικών Τιμών», ότι οι διπλότυπες πλειάδες θα πρέπει να εξαλειφθούν. Αλλιώς σε αυτό το παράδειγμα, το ζεύγος (Harding, Φύση) θα καταγράφεται δύο φορές.

15.

Αποτελέσματα_15				
ISBN	**Όνομα**	**Τίτλος**	**Εκδότης**	**Αντικείμενο**
0-115-01214-1	Nkoma, Jon	Birds of Africa	Loraine	Φύση
0-364-87547-X	Lau, Won	Early Tang Paintings	Bellman	Τέχνη
0-364-87547-X	Chan, Jimmy	Early Tang Paintings	Bellman	Τέχνη
0-56-000142-8	East, Lane	Springtime Gardening	Swift-Key	Φύση
0-816-35421-9	King, Dorothy	Springtime Gardening	Harding	Φύση
0-816-53705-4	Kovalsco, Bert	Baskets for Today	Harding	Τέχνη
0-816-88506-0	King, Dorothy	Autumn Annuals	Harding	Φύση

17. α. **Προβολή** (**Περιορισμός** Βιβλίο **όπου** Αντικείμενο = «Τέχνη») **πάνω από** Τίτλος **δίνει** Αποτελέσματα_17
β. **SELECT** Τίτλος **FROM** Βιβλίο **WHERE** Αντικείμενο = «Τέχνη»
γ. Το σύνολο τιμών του x είναι Βιβλίο, $\{x.Τίτλος | x.Αντικείμενο = "Τέχνη"\}$
δ.

Αποτελέσματα_17
Τίτλος
Baskets for Today
Early Tang Paintings

19. α. **Προβολή** (**Ένωση** (**Περιορισμός** Βιβλίο **όπου** Εκδότης = «Harding») **και** Γράφει **πάνω από** ISBN) **πάνω από** Όνομα **δίνει** Αποτελέσματα_19
β. **SELECT** Όνομα **FROM** Γράφει, Βιβλίο **WHERE** Βιβλίο.ISBN = Γράφει.ISBN **AND** Εκδότης = «Harding»
γ. Το σύνολο τιμών του x είναι Γράφει, το σύνολο τιμών του y είναι Βιβλίο, {x.Όνομα | **υπάρχει** y(y.Εκδότης = «Harding» **και** y.ISBN = x.ISBN)}
δ.

Αποτελέσματα_19
Όνομα
King, Dorothy
Kovalsco, Bert

21. α. **Προβολή** (**Ένωση** (**Ένωση** (**Περιορισμός** Συγγραφέας **όπου** Χώρα = «Η.Π.Α») **και** Γράφει **πάνω από** Όνομα) **και** Βιβλίο **πάνω από** ISBN) **πάνω από** Τίτλος **δίνει** Αποτελέσματα_21

β. **SELECT** Τίτλος **FROM** Συγγραφέας, Βιβλίο, Γράφει **WHERE** Συγγραφέας.Όνομα = Γράφε.Όνομα **AND** Γράφει.ISBN = Βιβλίο.ISBN **AND** Χώρα = «Η.Π.Α»

γ. Το σύνολο τιμών του x είναι Βιβλίο, το σύνολο τιμών του y είναι Συγγραφέας, το σύνολο τιμών του z είναι Γράφει, $\{x$.Τίτλος | **υπάρχει** $y, z(y$.Χώρα = «Η.Π.Α» **και** y.Όνομα = z.Όνομα **και** z.ISBN = x.ISBN$\}$

δ.

Αποτελέσματα_19
Τίτλος
Baskets for Today
Springtime Gardening

23. α. **Προβολή** (**Ένωση** (**Ένωση** (**Περιορισμός** Συγγραφέας **όπου** Χώρα = «Αγγλία») **και** Γράφει **πάνω από** Όνομα) **και** (**Περιορισμός** Βιβλίο **όπου** Αντικείμενο = «Τέχνη») πάνω από ISBN) **πάνω από** Όνομα, Τίτλος **δίνει** Αποτελέσματα_23.

β. **SELECT** Συγγραφέας.Όνομα, Τίτλος **FROM** Βιβλίο, Συγγραφέας, Γράφει **WHERE** Συγγραφέας.Όνομα = Γράφει.Όνομα **AND** Γράφει.ISBN = Βιβλίο.ISBN **AND** Χώρα = «Αγγλία» **AND** Αντικείμενο = «Τέχνη».

γ. Το σύνολο τιμών του x είναι Συγγραφέας, το σύνολο τιμών του y είναι Βιβλίο, το σύνολο τιμών του z είναι Γράφει, $\{x$.Όνομα **και** y.Τίτλος | x.Χώρα = «Αγγλία» **και** y.Αντικείμενο = «Τέχνη» **και υπάρχει** z | z.Όνομα = x.Όνομα **και** y.ISBN = z.ISBN$\}$.

δ. Το κενό σύνολο. Δεν υπάρχουν αποτελέσματα που ταιριάζουν με το συγκεκριμένο ερώτημα.

25. α. $p \cdot q$

β. Αν το κοινό γνώρισμα είναι ταξινομημένο σε κάθε πίνακα, τότε η ένωση μπορεί να πραγματοποιηθεί κάνοντας κάτι παρόμοιο με την ταξινόμηση με συγχώνευση (δείτε την άσκηση 19 της παραγράφου 3.3) ως προς το κοινό γνώρισμα, το οποίο σημαίνει ότι θα χρειαζόταν να εξεταστούν το πολύ $(p + q)$ γραμμές.

γ. 14

δ. 12

27. α. **SELECT** Συγγραφέας.Όνομα, Τίτλος, Βιβλίο.ISBN, Ποσοστό_Δικαιωμάτων **FROM** Συγγραφέας, Βιβλίο, Γράφει **WHERE** Συγγραφέας.Όνομα = Γράφει.Όνομα **AND** Γράφει.ISBN = Βιβλίο.ISBN **AND** Ποσοστό_Δικαιωμάτων $<$ 100.

β. ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΜΙΚΡΟΤΕΡΑ ΑΠΟ 100

Όνομα	Τίτλος	ISBN	Ποσοστό_Δικαιωμάτων
Chan, Jimmy	Early Tang Paintings	0-364-87547-X	20
Lau, Won	Early Tang Paintings	0-364-87547-X	80

29. α. Ναι. Κάθε γνώρισμα που περιγράφεται για τα Εργαζόμενος, Συνεισφορά και Πληρωμή καταγράφεται και δεν έχουν περιληφθεί γνωρίσματα που δεν αναφέρονται.
β. Το πρωτεύον κλειδί των Εργαζομένων είναι ο *Α.Μ. Εργαζομένου*, ο οποίος υποθετικά αποτελεί ένα μοναδικό αναγνωριστικό για κάθε εργαζόμενο. Ομοίως, το πρωτεύον κλειδί για τη Συνεισφορά είναι ο *Α.Μ. Συνεισφοράς*. Το πρωτεύον κλειδί της Πληρωμής είναι το σύνθετο κλειδί *Α.Μ. Συνεισφοράς / Ημερομηνία Πληρωμής*. Κανένα από τα τρία γνωρίσματα από μόνο του δεν προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο μια πληρωμή, ούτε επίσης ο *Α.Μ. Συνεισφοράς / Ποσό Πληρωμής* [μια δοθείσα συνεισφορά ίσως καταλήγει στο ίδιο ποσό πληρωμής σε αρκετές διαφορετικές ημερομηνίες] ή η *Ημερομηνία Πληρωμής / Ποσό Πληρωμής* [πολλαπλές συνεισφορές μπορεί να πληρώνουν το ίδιο ποσό την ίδια ημερομηνία πληρωμής]. Όμως μια δοθείσα συνεισφορά δεν έχει διαφορετικά ποσά πληρωμής στην ίδια ημερομηνία.

31. α. Οι τρεις πίνακες σχέσης είναι

ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΙ			
Α.Μ. Εργαζομένου	**Όνομα**	**Επίθετο**	**Τμήμα**
1	Mary	Black	Λογιστήριο
2	June	Brown	Μισθοδοσία
3	Kevin	White	Λογιστήριο
4	Kelly	Chen	Μισθοδοσία
6	Conner	Smith	Πωλήσεις

ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΕΣ				
Α.Μ. Συνεισφοράς	**Α.Μ. Εργαζομένου**	**Ημερομηνία Συνεισφοράς**	**Συνολικό Ποσό**	**Αριθμός Πληρωμών**
101	1	1/1/2013	$ 300	3
102	3	1/1/2013	$ 500	2
103	6	1/1/2013	$ 150	2
104	4	15/4/2013	$ 100	1
105	1	1/6/2013	$ 210	3
107	2	1/6/2013	$ 300	2
108	2	1/1/2014	$ 600	12
109	3	1/1/2014	$ 500	2

ΠΛΗΡΩΜΕΣ

Α.Μ. Συνεισφοράς	Ημερομηνία πληρωμής	Ποσό Πληρωμής
101	15/1/2013	$ 100
101	31/1/2013	$ 100
101	15/2/2013	$ 100
102	15/1/2013	$ 250
102	31/1/2013	$ 250
103	15/1/2013	$ 75
103	31/1/2013	$ 75
104	30/4/2013	$ 100
105	15/6/2013	$ 70
105	30/6/2013	$ 70
105	15/7/2013	$ 70
107	15/6/2013	$ 150
107	30/6/2013	$ 150
108	15/1/2014	$ 50
109	15/1/2014	$ 250

β. Ο *Α.Μ. Εργαζομένου* στον πίνακα Συνεισφορών είναι ένα ξένο κλειδί μέσα στον πίνακα Εργαζομένων. Ο *Α.Μ. Συνεισφοράς* στον πίνακα Πληρωμών είναι ένα ξένο κλειδί μέσα στον πίνακα Συνεισφορών.

γ. Εφόσον ο Α.Μ. Εργαζομένου είναι απλά μια ακολουθία διαδοχικών ακέραιων τιμών που είναι πιθανόν να μην έχουν καμία σημασία έξω από τη βάση δεδομένων, πιθανότατα είναι ένα τυφλό κλειδί που δημιουργείται αυτόματα από το σύστημα της βάσης δεδομένων.

33. **SELECT** Εργαζόμενος. Α.Μ. Εργαζομένου, Ημερομηνία Πληρωμής, Ποσό Πληρωμής **FROM** Εργαζόμενος, Συνεισφορά, Πληρωμή **WHERE** Εργαζόμενος. Α.Μ. Εργαζομένου = Συνεισφορά. Α.Μ. Εργαζομένου **AND** Συνεισφορά. Α.Μ. Συνεισφοράς = Πληρωμή. Α.Μ. Συνεισφοράς **AND** Ποσό Πληρωμής > 100. Το αποτέλεσμα είναι

Α.Μ. Εργαζομένου	Ημερομηνία Πληρωμής	Ποσό Πληρωμής
2	15/6/2013	$ 150
2	30/6/2013	$ 150
3	15/1/2013	$ 250
3	31/1/2013	$ 250

3	15/1/2014	\$ 250

35. **SELECT** Όνομα, Επίθετο, Ποσό Πληρωμής, Ημερομηνία Πληρωμής **FROM** Εργαζόμενος, Συνεισφορά, Πληρωμή **WHERE** Εργαζόμενος. Α.Μ. Εργαζομένου = Συνεισφορά. Α.Μ. Εργαζομένου **AND** Συνεισφορά. Α.Μ. Συνεισφοράς = Πληρωμή. Α.Μ. Συνεισφοράς **AND** Ημερομηνία Πληρωμής = «15/1/2013». (Η τελευταία ισότητα πιθανόν να χρειαστεί μια πρόσθετη διαδικασία που εξαρτάται από το σύστημα για να μετατρέψει την ημερομηνία 15/1/2013 σε έναν αληθή τύπο ημερομηνίας ώστε να δουλέψει ο έλεγχος της ισότητας.) Το αποτέλεσμα είναι

Όνομα	**Επίθετο**	**Ποσό Πληρωμής**	**Ημερομηνία Πληρωμής**
Mary	Black	\$ 100	15/1/2013
Kevin	White	\$ 250	15/1/2013
Conner	Smith	\$ 75	15/1/2013

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.4

1. α. Πεδίο Ορισμού = $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, Πεδίο Τιμών = $\{8, 9, 10, 11\}$, Σύνολο τιμών = $\{8, 9, 10\}$.
β. 8, 10.
γ. 6, 7.
δ. Όχι. Όχι.

3. α. $\{(0, -1), (1, 1), (2, 3)\}$
β. $\{(1, 1), (2, 3), (4, 7), (5, 9)\}$
γ. $\{(\sqrt{7}, 2\sqrt{7} - 1), (1{,}5\ , 2)\}$

5. α. $f(A) = \{3, 9, 15\}$
β. $f(A) =$ όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του 6

7. α. $f(S) = \{3, 7\}$
β. $f(S) = \{1, 3\}$
γ. $f(S) = \{2, 1, 0\}$

9. α. Ψ   β. Ψ   γ. Α   δ. Ψ

11. α. δεν είναι συνάρτηση.
β. είναι συνάρτηση.
γ. είναι συνάρτηση ένα προς ένα και επί.
δ. δεν είναι συνάρτηση.
Ε. δεν είναι συνάρτηση.

13. α. δεν είναι συνάρτηση.
β. είναι συνάρτηση επί αλλά όχι ένα προς ένα.
γ. είναι συνάρτηση ένα προς ένα αλλά όχι επί.

15. α. είναι συνάρτηση.

β. δεν είναι συνάρτηση.
γ. είναι συνάρτηση επί.
δ. αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. $f^{-1}: \{p, q, r\} \to \{1, 2, 3\}$ όπου $f^{-1} = \{(q, 1), (r, 2), (p, 3)\}$.
ε. είναι συνάρτηση ένα προς ένα.
στ. αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. $h^{-1}: R^2 \to R^2$ όπου $h^{-1}(x, y) = (y - 1, x - 1)$.

17. Οποιαδήποτε περιττή τιμή του n θα δημιουργήσει μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση αφού η συνάρτηση θα είναι παρόμοια με αυτήν της εικόνας 5.12. Για άρτιες τιμές του n η συνάρτηση δεν είναι ένα προς ένα αφού θετικές και αρνητικές τιμές απεικονίζονται στο ίδιο αποτέλεσμα.

19. Η f δεν είναι ούτε ένα προς ένα ούτε επί. Για παράδειγμα, $f(xxy) = f(yyy) = 3$, οπότε η f δεν είναι ένα προς ένα. Για κάθε συμβολοσειρά $s, f(s) \geq 0$. Δε υπάρχουν συμβολοσειρές στο A^* που απεικονίζονται σε αρνητικές τιμές, οπότε η f δεν είναι επί.

21. Η f είναι ένα προς ένα και επί. Αν $f(s_1) = f(s_2)$, τότε $s_1 = s_2$ (απλά αντιστρέφουμε ξανά τις συμβολοσειρές και επιστρέφουμε εκεί που ξεκινήσαμε), οπότε η f είναι ένα προς ένα. Δοθείσης οποιασδήποτε συμβολοσειράς s στο A^*, έστω y η αντίστροφη συμβολοσειρά. Τότε η y ανήκει στο A^* και $f(y) = s$, οπότε η f είναι επί.

23. Η f δεν είναι ούτε ένα προς ένα ούτε επί. Για παράδειγμα, $f(\{a, b\}) = f(\{b, c\}) = 2$, οπότε η f δεν είναι ένα προς ένα. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των μεγεθών όλων των υποσυνόλων του $\{a, b, c\}$ που είναι το $\{0, 1, 2, 3\}$, οπότε αφού αυτό δεν ισούται με το Z, η f δεν είναι επί.

25. Για παράδειγμα, $f(x) = 1/x$. Για $x \geq 1$, η τιμή $1/x$ είναι μεγαλύτερη από το 0 αλλά μικρότερη ή ίση με το 1, οπότε $f: S \to T$. Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $1/x_1 = 1/x_2$ και $x_1 = x_2$, οπότε η f είναι ένα προς ένα. Δοθείσης μιας οποιασδήποτε τιμής y στο T, δηλαδή $0 < y \leq 1$, η τιμή $1/y$ ανήκει στο S και $f(1/y) = 1/(1/y) = y$, οπότε η f είναι επί.

27. α. 3 β. 0 γ. 0

29. Ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x ισούται με τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x, επομένως ο x είναι ακέραιος.

31. Έστω $k \leq x < k + 1$ όπου k είναι ένας ακέραιος. Τότε ο k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος με το x, οπότε $\lfloor x \rfloor = k$. Επίσης, πολλαπλασιάζοντας ολόκληρη την ανισότητα με -1, το οποίο αντιστρέφει τα σύμβολα της ανισότητας, παίρνουμε $-k \geq -x > -k - 1$ που σημαίνει ότι ο $-k$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το $-x$, οπότε $\lceil -x \rceil = -k$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας με -1 παίρνουμε $-\lceil -x \rceil = k$.

33. α. Ψευδής. Έστω $x = 3{,}6$. Τότε $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lceil 3 \rceil = 3 \neq x$.
β. Ψευδής. Έστω $x = 4{,}8$. Τότε $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 9{,}6 \rfloor = 9$ αλλά $2\lfloor x \rfloor = 2 \cdot 4 = 8$.

35. Αν $2^k < n < 2^{k+1}$ τότε $log\, log\left(2^k\right) < log\, log\, n < log\, log\left(2^{k+1}\right)$ ή $k < log\, log\, n < k + 1$ και $\lfloor log\, log\, n \rfloor = k$, $\lceil log\, log\, n \rceil = k + 1$.

37. α. 9 β. 0 γ. 4 δ. 2

39. Ψευδής. Για παράδειγμα, έστω $x = 7$ και $y = 9$. Τότε $x\, mod\, 10 + y\, mod\, 10 = 7 + 9 = 16$ αλλά $(x + y)\, mod\, 10 = 16\, mod\, 10 = 6$.

41. α. $(1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0), (5, 1)$.
β. $c_{A \cap B}(x) = 1 \leftrightarrow x \in A$ και $x \in B \leftrightarrow c_A(x) = 1$ και $c_B(x) = 1 \leftrightarrow c_A(x) \cdot c_B(x) = 1$.
γ. Αν $c_{A'}(x) = 1$, τότε $x \in A'$ και $x \notin A$, οπότε $c_A(x) = 0 = 1 - c_{A'}(x)$. Αν $c_{A'}(x) = 0$, τότε $x \notin A'$ και $x \in A$, οπότε $c_A(x) = 1 = 1 - c_{A'}(x)$.

δ. Όχι. Έστω $S = \{1,2,3\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$. Τότε $c_{A\cup B}(2) = 1$ αλλά $c_A(2) + c_B(2) = 1 + 1 = 2$.

43. α. $S(0,n) > A(0,n)$ για $n > 1$ επειδή $n^n > n + 1$.

β. $S(1,n) = S\big(0, S(0,n)\big) = S(0,n^n) = n^{n^{n^n}}$.

γ. Το googolplex είναι $10^{10^{100}} = 10^{10^{10^{10}}} = S(1,10)$

45. $g \circ f = \{(1,6),(2,7),(3,9),(4,9)\}$

47. α. 18 β. 16 γ. $3x+3$ δ. $3x+1$ ε. $x+2$ στ. $9x$

49. α. Αν $f(s_1) = f(s_2)$ τότε $g\big(f(s_1)\big) = g\big(f(s_2)\big)$ οπότε $(g\circ f)(s_1) = (g\circ f)(s_2)$. Εφόσον η $g\circ f$ είναι ένα προς ένα, $s_1 = s_2$ και συνεπώς η f είναι ένα προς ένα.

51. α. $f^{-1}(x) = x/2$ β. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ γ. $f^{-1}(x) = 3x - 4$

53. α. $(1,3,5,2)$ β. $(1,4,3,2,5)$

55. Αμφότερες οι $h\circ(g\circ f)$ και η $(h\circ g)\circ f$ έχουν πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το A. Για $x\in A$, $\big(h\circ(g\circ f)\big)(x) = h\big((g\circ f)\big)(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = (h\circ g)\big(f(x)\big) = \big((h\circ g)\circ f\,\big)(x)$.

57. α. $(1,2,5,3,4)$

β. $(1,7,8)\circ(2,4,6)$

γ. $(1,5,2,4)\circ(3,6)$

δ. $(2,3)\circ(4,8)\circ(5,7)$

59. α. (a,d,e,b) β. (d,e) γ. $(a,d)\circ(c,e)$

61. $f^{-1} = (2,4,3,8)$

63. α. 3^4 β. 36

65. α. Για $|S| = 2$, $2!/0! = 2$ και $2^2 - C(2,1)\cdot 1^2 = 4 - 2 = 2$. Για $|S| = 3$, $3!/0! = 6$ και $3^3 - C(3,1)\cdot 2^3 + C(3,2)\cdot 1^3 = 27 - 3\cdot 8 + 3 = 6$. Για $|S| = 4$, $4!/0! = 24$ και $4^4 - C(4,1)\cdot 3^4 + C(4,2)\cdot 2^4 - C(4,3)\cdot 1^4 = 256 - 4\cdot 81 + 6\cdot 16 - 4 = 24$.

β. Υποθέτουμε ότι η f είναι επί. Αν δύο διακεκριμένα στοιχεία του S απεικονίζονται σε ένα στοιχείο του S, τότε απομένουν $n-2$ στοιχεία για να απεικονιστούν σε $n-1$ στοιχεία, το οποίο φυσικά δεν γίνεται. Επομένως η f είναι ένα προς ένα. Τότε τα n στοιχεία του S απεικονίζονται σε n διακεκριμένα στοιχεία του S. Επομένως κάθε στοιχείο του S ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι επί.

γ. Για παράδειγμα, $S = N$, $f\colon N \to N$ που ορίζεται ως $f(x) = 2x$.

δ. Για παράδειγμα, $S = N$, $f\colon N\to N$ που ορίζεται ως $f(0) = 0$, $f(x) = x - 1$ για $x \ge 1$.

67. α. n^n β. $n!$ γ. $n!$ δ. $n!$

ε. $n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right]$

στ. Ο αριθμός των διαταράξεων (απάντηση ε) είναι μικρότερος από $n!\left[\frac{1}{2!}\right] = n!\cdot\frac{1}{2} < n!$ και $n! < n^n$. Ο συνολικός αριθμός των συναρτήσεων, χωρίς περιορισμούς, είναι ο μέγιστος. Μερικές μόνο από τις συναρτήσεις αυτές είναι ένα προς ένα και επί, αλλά αυτό αποτελεί επίσης τον ορισμό μιας μετάθεσης. Δεν ισχύει ότι όλες οι μεταθέσεις είναι διαταράξεις, οπότε ο αριθμός των διαταράξεων παραμένει μικρότερος.

69. 1854

71. α. Για $x\in S$, $f(x) = f(x)$, οπότε $x\,\rho\,x$ δηλαδή η ρ είναι ανακλαστική. Για $x,y\in S$, αν $x\,\rho\,y$ τότε $f(x) = f(y)$ και $f(y) = f(x)$, οπότε $y\,\rho\,x$ δηλαδή η ρ είναι συμμετρική. Για $x,y,z\in S$, αν $x\,\rho\,y$ και $y\,\rho\,z$, τότε $f(x) = f(y)$ και $f(y) = f(z)$, οπότε $f(x) = f(z)$ και $x\,\rho\,z$, δηλαδή η ρ είναι μεταβατική.

β. Αν η f είναι συνάρτηση ένα προς ένα, τότε δεν υπάρχουν δύο στοιχεία του S που απεικονίζονται στην ίδια τιμή, οπότε κάθε κλάση ισοδυναμία αποτελείται από ένα μεμονωμένο στοιχείο.

γ. $[4] = \{4, -4\}$ επειδή $f(4) = f(-4)$.

73. α. $\{m, n, o, p\}$ β. $\{n, o, p\}$ γ. $\{o\}$

75. Ανακλαστική ιδιότητα: $S\ \rho\ S$ από την ταυτοτική συνάρτηση.

Συμμετρική ιδιότητα: Αν $S\ \rho\ T$ και f είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το S στο T, τότε $f^{-1}: T \to S$ και η f^{-1} είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, οπότε $T\ \rho\ S$.

Μεταβατική ιδιότητα: Αν $S\,\rho\,T$ και $T\,\rho\,U$, $f: S \to T$, $g: T \to U$ και f, g είναι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις, τότε $g \circ f: S \to U$ και η $g \circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, οπότε $S\ \rho\ U$.

77. α. (define (square x)
$(* \, xx)$)

β. 18

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.5

1. Για παράδειγμα, $n_0 = 1, c_1 = 1/34, c_2 = 1$. Για $x \geq 1$, $\left(\frac{1}{34}\right)(17x + 1) \leq x \leq 1(17x + 1)$

3. Για παράδειγμα, $n_0 = 2, c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Για $x \geq 2$, $1(15x^2 + x) \leq 29x^2 - 4x - 15 \leq 2 \cdot (15x^2 + x)$.

5. Για παράδειγμα, $n_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2$. Για $x \geq 1$, $1x^3 \leq x^3 + log\ log\ x \ \leq 2x^3$.

7. Ναι. Για παράδειγμα, στην άσκηση 1, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις σταθερές $n_0 = 1, c_1 = 1/34$, $c_2 = 1/10$. Τότε ο φάκελος θα βρισκόταν εξ' ολοκλήρου κάτω από την $g(x)$, αλλά θα συνέχιζε να ακολουθεί το γενικό «σχήμα» της $g(x)$.

9. 2

11.

$$\frac{x}{17x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{17} = \frac{1}{17}.$$

13.

$$\frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

15.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{log\ log\ x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}\, log\ log\ e}{1} = 0.$$

17. $[200\ log\ log\ x\ ] = [41\ ln\ ln\ x^2\ ] < [\sqrt[4]{x}] < [420\ x] < [17\ x\ log\ log\ x\ ] < [10x^2 - 3x + 5] < [2^x x^2]$.

19. Γνωρίζοντας ότι αλγόριθμος είναι $O(n^3)$ μας λέει μόνο ότι ο ρυθμός αύξησης είναι μικρότερος ή ίσος με το n^3. Θα μπορούσε να είναι $n^3, n^2, n\ log\ log\ n\ , n,$ κ.τ.λ. Γνωρίζοντας ότι ο αλγόριθμος είναι $o(n^3)$ μας λέει ότι ο ρυθμός αύξησης είναι μικρότερος από n^3, αλλά θα μπορούσε ξανά να είναι $n^2, n\ log\ log\ n$, κ.τ.λ. Η πιο χρήσιμη πληροφορία είναι ότι ο αλγόριθμος είναι $\Theta(n^2)$, που σημαίνει ότι ουσιαστικά αυξάνεται ως ένα σταθερό πολλαπλάσιο της παραβολής.

21. $S(n) = \Theta(n^2)$.

23. $S(n) = \Theta(n \log \log n)$.

25. $S(n) = \Theta(n^3) = \Theta(n)$.

27. α. $C'(n) = \Theta(n \log \log n)$.

β. Η ακριβής λύση για την $C(n)$ είναι $C(n) = n(\log \log n) - n + 1$, η οποία είναι επίσης $\Theta(n \log \log n)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.6

1. $25 \text{ mod } 6 = 1$, $11 \text{ mod } 6 = 5$, $14 \text{ mod } 6 = 2$ και $(5 + 2) \text{ mod } 6 = 1$.

3. $262 \text{ mod } 13 = 2$, $74 \text{ mod } 13 = 9$, $188 \text{ mod } 13 = 6$ και $(9 + 6) \text{ mod } 13 = 2$.

5. $486 \text{ mod } 5 = 1$, $18 \text{ mod } 5 = 3$, $27 \text{ mod } 5 = 2$ και $(3 \cdot 2) \text{ mod } 5 = 1$.

7. Έστω $x = q_1 n + r_1$, $0 \le r_1 < n$ και $y = q_2 n + r_2$, $0 \le r_2 < n$, οπότε $x \bmod n = r_1$ και $y \bmod n = r_2$. Τότε $x \cdot y = (q_1 q_2 n + q_2 r_1 + q_1 r_2)n + (r_1 \cdot r_2)$, $0 \le r_1 \cdot r_2 < n^2$. Έστω $r_1 \cdot r_2 = kn + r$ με $0 \le r < n$. Τότε $x \cdot y = (q_1 q_2 n + q_2 r_1 + q_1 r_2 + k)n + r$ με $0 \le r < n$, οπότε $(x \cdot y) \bmod n = r$. Επίσης $x \bmod n \cdot y \bmod n = r_1 \cdot r_2 = kn + r$ με $0 \le r < n$, οπότε $(x \bmod n \cdot y \bmod n) \bmod n = r$.

9. Η απάντηση (γ) είναι σωστή.

11.

0	33
1	1
2	13
3	12
4	34
5	38
6	27
7	22
8	
9	
10	

13. α. Οι τιμές αποθηκεύονται στις θέσεις 6, 14, 1, 7, 8, 2, 16, 9, 0.

0	50

1	52
2	18
3	
4	
5	
6	23
7	40
8	24
9	58
10	
11	
12	
13	
14	14
15	
16	33

β. Το 58 κατακερματίζεται στη θέση 7, η οποία περιέχει ένα άλλο στοιχείο (40), οπότε ακολουθώντας το σχήμα επίλυσης της σύγκρουσης υπό το οποίο το 58 θα είχε αποθηκευτεί, αναζητούμε την επόμενη θέση του πίνακα, 8, η οποία περιέχει το 24, έπειτα αναζητούμε την επόμενη θέση του πίνακα, 9, η οποία περιέχει το 58. Το 41 επίσης κατακερματίζεται στη θέση 7 του πίνακα. Προχωρώντας όπως προηγουμένως, ελέγχονται επίσης οι θέσεις 8 και 9 οι οποίες δεν περιέχουν το 41. Η επόμενη θέση για έλεγχο είναι η θέση 10, η οποία είναι κενή. Επομένως, το 41 δεν βρίσκεται στον πίνακα.

15. α. $1/t$ β. $2/t$ γ. $3/t$

17. α. ALLS WELL THAT ENDS WELL

β. TWAS BRILLIG AND THE SLITHY TOVES DID GYRE AND GIMBLE IN THE WABE

γ. COL MUSTARD WITH THE KNIFE IN THE LIBRARY

19. $k = 9$, SLEEP NOW WE MARCH ON ROME TOMORROW

21. α. $x = 10011$ (συμβολοσειρά 5 bit), $p = x \, mod \, 2^4 = 00011$, $q = p \cdot 2 = 00110$, $s = x \oplus p = 10000$, $t = s \cdot 2^{-4} = 00001$, $y = q + t = 00111$.

β. $x = 0011$ (συμβολοσειρά 4 bit), $p = x \, mod \, 2^3 = 0011$, $q = p \cdot 2 = 0110$, $s = x \oplus p = 0000$, $t = s \cdot 2^{-4} = 0000$, $y = q + t = 0110$.

23. 1010001111101010

25. α. $d = 3$.

B. $8^3 \, mod \, 15 = 8^2 \cdot 8 \, mod \, 15 = 64 \cdot 8 \, mod \, 15 = 4 \cdot 8 \, mod \, 15 = 32 \, mod \, 15 = 2$.

γ. $2^3 \, mod \, 15 = 8$.

27. α. $d = 23$ β. $12^7 \ mod \ 55 = 23$ γ. $23^{23} \ mod \ 55 = 12$
29. α. $n(n-1)/2$ β. n
31. α. X β. 7
33. ψηφίο ελέγχου = 8.
35. α. temp = αριθμός
μονάδες = temp mod 10
temp = (temp – μονάδες)/10
δεκάδες = temp mod 10
temp = (temp – δεκάδες)/10
εκατοντάδες = temp mod 10
temp = (temp – εκατοντάδες)/10
χιλιάδες = temp

β. temp = 7426
μονάδες = 6
temp = 742
δεκάδες = 2
temp = 74
εκατοντάδες = 4
temp = 7
χιλιάδες = 7

37. Αν $x \equiv y \ (mod \ n)$ τότε $x - y = kn$ όπου k είναι ένας ακέραιος. Επομένως, $xc - yc = kcn$ όπου kc είναι ένας ακέραιος, οπότε $xc \equiv yc \ (mod \ n)$.
39. α. Η $f(ka) = (ka) \ mod \ p$ απεικονίζει κάθε στοιχείο του S σε μια μοναδική τιμή στο T. Για να δείξουμε ότι η f είναι ένα προς ένα, υποθέτουμε ότι $f(k_1 a) = f(k_2 a)$ για κάποια k_1, k_2 με $0 \leq k_1, k_2 \leq p - 1$. Τότε $k_1 a \ mod \ p = k_2 a \ mod \ p$. Από την εξάσκηση 43(β), $k_1 a \equiv k_2 a \ (mod \ p)$. Εφόσον ο p είναι πρώτος αριθμός και ο a δεν διαιρείται από τον p, $MK\Delta(a, p) = 1$, οπότε από την άσκηση 38 (διαγραφή υπό την ισοτιμία modulo n), $k_1 \equiv k_2 \ (mod \ p)$ ή $k_1 - k_2 = mp$ για κάποιον ακέραιο m. Αλλά $-p < k_1 - k_2 < p$ οπότε $m = 0$ και $k_1 = k_2$, οπότε $k_1 a = k_2 a$ και η f είναι ένα προς ένα.
β. $|S| = |T| = p$ και η f είναι μια συνάρτηση ένα προς ένα. Επομένως, κάθε ένα από τα p διακεκριμένα στοιχεία του S απεικονίζονται σε διακεκριμένα στοιχεία του T, καθιστώντας κάθε ένα από τα p στοιχεία του T την εικόνα ενός στοιχείου του S.
γ. Από την εξίσωση (1) αυτής της παραγράφου, έχουμε $[a \cdot 2a \cdot \ldots \cdot (p-1)a] \ mod \ p = \big[(a \ mod \ p) \cdot (2a \ mod \ p) \cdot \ldots \cdot \big((p-1)a \ mod \ p\big)\big] \ mod \ p$. Εφόσον η f είναι μια συνάρτηση επί, το σύνολο T είναι το σύνολο όλων των υπολοίπων modulo p των στοιχείων του S. Εφόσον $0 \ mod \ p = 0$, το σύνολο $\{1, 2, \ldots, (p-1)\}$ είναι το σύνολο όλων των υπολοίπων modulo p των στοιχείων $\{a, 2a, \ldots, (p-1)a\}$. Επομένως, $\big[(a \ mod \ p) \cdot (2a \ mod \ p) \cdot \ldots \cdot \big((p-1)a \ mod \ p\big)\big] \ mod \ p = [1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)] \ mod \ p = (p-1)! \ mod \ p$.
δ. Από το ερώτημα (γ), $[a^{p-1}(p-1)!] \ mod \ p = (p-1)! \ mod \ p$ ή, από την εξάσκηση 43(β), $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \ (mod \ p)$. Εφόσον ο p είναι πρώτος, $MK\Delta\big((p-1)!, p\big) = 1$, οπότε από την άσκηση 38 (διαγραφή υπό την ισοτιμία modulo n), $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod \ p)$.
ε. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

στ. $4^6 \, mod \, 7 = (4^3 \cdot 4^3) \, mod \, 7 = 64 \cdot 64 \, mod \, 7 = 1 \cdot 1 \, mod \, 7 = 1$.

41. α. $d \cdot e \equiv 1 \, mod \, \varphi(n)$ σημαίνει ότι $d \cdot e \equiv 1 \, mod \, (p-1)(q-1)$, έτσι ώστε $d \cdot e = 1 + k(p-1)(q-1)$ για κάποιον ακέραιο k. Τότε $T^{ed} = T^{1+k(p-1)(q-1)} = T\left(T^{k(p-1)(q-1)}\right) = T(T^{p-1})^{k(q-1)}$ ή $T(T^{q-1})^{k(p-1)}$.

β. Αν ο T δεν διαιρείται από τον p, τότε από το μικρό θεώρημα του Fermat (άσκηση 39) έχουμε $T^{p-1} \equiv 1 \, (mod \, p)$. $T^{ed} \, mod \, p = T(T^{p-1})^{k(q-1)} \, mod \, p = [T(T^{p-1})(T^{p-1}) \ldots (T^{p-1})] \, mod \, p = [(T \, mod \, p) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1] \, mod \, p$ από την εξίσωση (1) και την εξάσκηση 43(β) $= T \, mod \, p$ έτσι ώστε $T^{ed} \equiv T \, (mod \, p)$ από την εξάσκηση 43(β). Ομοίως, αν ο T δεν διαιρείται από τον q, τότε $T^{q-1} \equiv 1 \, (mod \, q)$. $T^{ed} \, mod \, q = T(T^{q-1})^{k(p-1)} \, mod \, q$ και $T^{ed} \equiv T \, (mod \, q)$.

γ. Αν $p \,|\, T$, τότε $T = kp$ για κάποιον ακέραιο k και $T^{ed} - T = (kp)^{ed} - kp = p(p^{ed-1}k^{ed} - k)$ όπου ο $p^{ed-1}k^{ed} - k$ είναι ένας ακέραιος, οπότε $T^{ed} \equiv T \, (mod \, p)$. Αν $p \mid T$ και $q \mid T$, τότε ο T είναι πολλαπλάσιο του p και πολλαπλάσιο του q. Εφόσον οι p, q είναι πρώτοι, $T = cpq$ για κάποιον ακέραιο c, το οποίο αποτελεί αντίφαση αφού $T < pq = n$.

δ. Η απόδειξη είναι πολύ παρόμοια με το ερώτημα (γ).

ε. $T^{ed} \equiv T \, (mod \, p)$, $T^{ed} \equiv T \, (mod \, q)$ και οι p, q είναι σχετικά πρώτοι. Αυτό ταιριάζει με το πρότυπο του κινέζικου θεωρήματος των υπολοίπων όπου $a_1 = a_2 = T$ και $x = T^{ed}$. Όμως επίσης, $T \equiv T \, (mod \, p)$ και $T \equiv T \, (mod \, q)$. Από το κινέζικο θεώρημα των υπολοίπων, $T^{ed} \equiv T \, (mod \, pq)$ ή $T^{ed} \equiv T \, (mod \, n)$. Από την εξάσκηση 43(β), $T^{ed} \, mod \, n = T \, mod \, n = T$ αφού $T < n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.7

1. 2, −4.

3. $x = 1,\ y = 3,\ z = -2,\ w = 4$.

5. α.

$$[6 \ -5 \ 0 \ 3 \ 5 \ 3\,]$$

β.

$$[-2 \ 7 \ -2 \ -3 \ 1 \ 5\,]$$

γ.

$$[12 \ 3 \ 6 \ 17 \ -3 \ 15 \ 3 \ 9 \ 6\,]$$

δ.

$$[-4 \ -8 \ -12 \ 2\,]$$

ε.

$$[14 \ -17 \ 2 \ 9 \ 9 \ 1\,]$$

7. α.

$$[10 \ 7 \ -2 \ -4 \ 30 \ 8\,]$$

β. δεν είναι να δυνατόν να υπολογιστεί.

Γ.

$$[21 \ -23 \ 33 \ -44 \ 11 \ 1\,]$$

δ.

$$[28\ 4\ 6\ 25\ ]$$

9. α.

$$A \cdot B = [10\ 4\ 18\ \ -3\ ] \qquad B \cdot A = [14\ 1\ 4\ \ -7\ ]$$

β.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = [68\ \ -58\ 102\ \ -84\ ]$$

γ.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = [26\ \ -9\ 40\ \ -23\ ]$$

δ.

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C = [42\ \ -35\ 32\ \ -28\ ]$$

11. Αμφότεροι οι πίνακες $A \cdot (B \cdot C)$ και $(A \cdot B) \cdot C$ μπορούν να υπολογιστούν και θα προκύψει ένας $n \times m$ πίνακας. Το i, j στοιχείο του $A \cdot (B \cdot C)$ είναι

$$\sum_{s=1}^{p} a_{is}(B \cdot C)_{sj} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{sk}c_{kj}\right)$$
$$= a_{i1}\left(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1r}c_{rj}\right) + \cdots + a_{ip}\left(b_{p1}c_{1j} + b_{p2}c_{2j} + \cdots + b_{pr}c_{rj}\right)$$
$$= \left(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{ip}b_{p1}\right)c_{1j} + \cdots + \left(a_{i1}b_{1r} + a_{i2}b_{2r} + \cdots + a_{ip}b_{pr}\right)c_{rj}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} (A \cdot B)_{ik}c_{kj}$$

που είναι το i, j στοιχείο του $(A \cdot B) \cdot C$.

13. α. Υποθέτουμε ότι ολόκληρη η γραμμή i του A αποτελείται από 0. Τότε για κάθε j, το στοιχείο στη γραμμή i, στήλη j του $A \cdot B$ δίνεται από το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Το άθροισμα αυτό ισούται με 0 καθώς $a_{ik} = 0$ για όλες τις τιμές του k.

β. Υποθέτουμε ότι ολόκληρη η στήλη j του B αποτελείται από 0. Τότε για κάθε i, το στοιχείο στη γραμμή i, στήλη j του $A \cdot B$ δίνεται από το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Το άθροισμα αυτό ισούται με 0 καθώς $b_{kj} = 0$ για όλες τις τιμές του k.

15. α.

$$[1\ 6\ 3\ \ -2\ 4\ 1\ ]$$

β. Αν ο A είναι συμμετρικός τότε $a_{ij} = a_{ji}$ και $A^T(i,j) = A(j,i) = A(i,j)$. Επομένως, $A^T = A$. Αν $A^T = A$, τότε $A(i,j) = A^T(i,j) = A(j,i)$ και ο A είναι συμμετρικός.

γ. Η ισότητα $(A^T)^T = A$ προκύπτει από τον ορισμό. Δύο εναλλαγές γραμμών και στηλών έχουν ως αποτέλεσμα την επιστροφή στον αρχικό πίνακα.

δ. Έστω $A + B = C$. Τότε $C^T(i,j) = C(j,i) = A(j,i) + B(j,i) = A^T(i,j) + B^T(i,j)$ και $C^T = A^T + B^T$.

ε. Έστω A ένας πίνακας $n \times m$ και B ένας πίνακας $m \times p$. Τότε ο A^T είναι $m \times n$ και ο B^T είναι $p \times m$. Έστω $A \cdot B = C$. Τότε

$$C^T(i,j) = C(j,i) = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} A^T(k,j)B^T(i,k) = \sum_{k=1}^{m} B^T(i,k)A^T(k,j)$$
$$= (B^T \cdot A^T)(i,j)$$

και $C^T = B^T \cdot A^T$.

17. Για παράδειγμα, $[1\ 1\ -1\ -1\ ][1\ 1\ -1\ -1\ ] = [0\ 0\ 0\ 0\ ]$.

19. Η ισότητα αυτή δεν είναι πάντοτε αληθής (ως αντιπαράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες A, B της εξάσκησης 52). Είναι αληθής αν $A = B = I$ για παράδειγμα.

21. Η εγγραφή i, j του A^2 είναι $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$. Η εγγραφή j, i του A^2 είναι $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ki}$. Όμως οι εγγραφές αυτές είναι ίδιες αφού $a_{ik} = a_{ki}$ και $a_{kj} = a_{jk}$ (ο A είναι συμμετρικός).

23. Για $n = 1$, $A = [1\ 1\ 1\ 0\ ] = [F(2)\ F(1)\ F(1)\ F(0)\ ]$. Υποθέτουμε ότι $A^k = [F(k+1)\ F(k)\ F(k)\ F(k-1)\ ]$. Τότε $A^{k+1} = A^k \cdot A = [F(k+1)\ F(k)\ F(k)\ F(k-1)\ ][1\ 1\ 1\ 0\ ] = [F(k+1) + F(k)\ F(k+1)\ F(k) + F(k-1)\ F(k)\ ] = [F(k+2)\ F(k+1)\ F(k+1)\ F(k)\ ]$.

25. $(rA)(1/r)A^{-1} = r(1/r)(A \cdot A^{-1}) = 1I = I$ και $(1/r)A^{-1}(rA) = (1/r)(r)(A^{-1} \cdot A) = 1I = I$.

27. $x = 6,\ y = -1$.

29. $x = 11,\ y = 6,\ z = -2$.

31. $x = 9/14,\ y = 2/7,\ z = 31/14$.

33. $x = 5,\ y = -3,\ z = 4,\ w = 2$.

35. Για παράδειγμα,

$$x + 2y = 3$$
$$4x + y = 19$$
$$3x - y = 16$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$[1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 19\ 3\ -1\ 16\ ].$$

Οι παρακάτω στοιχειώδεις πράξεις γραμμών

$$\begin{array}{c} -4 \\ -3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 19 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix}$$

καταλήγουμε στον πίνακα

$$[1\ 2\ 3\ 0\ -7\ 7\ 0\ -7\ 7\ ].$$

Εφόσον η γραμμή 2 του επαυξημένου πίνακα είναι το άθροισμα των γραμμών 1 και 3, οι νέες γραμμές 2 και 3παριστάνουν την ίδια εξίσωση, οπότε στην πραγματικότητα αυτό είναι ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Λύνοντας την εξίσωση $-7y = 7$ παίρνουμε $y = -1$ και λύνοντας την εξίσωση $x + 2y = 3$ ή, αντικαθιστώντας το $y = -1$, την $x + 2 \cdot (-1) = 3$ παίρνουμε $x = 5$.

37. Έστω $g =$ η ποσότητα χρυσού σε κυβικά εκατοστά και $c =$ η ποσότητα χαλκού σε κυβικά εκατοστά. Τότε $c + g = 52$ και $9c + 19{,}3g = 859{,}4$. Η λύση είναι $g = 38$ κ.εκ., $c = 14$ κ.εκ. Το ποσοστό του χαλκού κατ' όγκο είναι $14/52 = 26{,}9\%$.

39. $A^{-1} = [-1/2\ 3/4\ 1/2\ \ -1/4\ ]$.

41. $A^{-1} = [-14/10\ 1/10\ 24/10\ \ -1/10\ ]$ $\quad A^{-1} \cdot B = [20\ 50\ ] = [x\ y\ ]$
οπότε $x = 20, y = 50$.

43. $x = 6,\ \ y = -1$.

45. $x = 11,\ \ y = 6,\ \ z = -2$.

47. $A \wedge B = [1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,]$ $\quad A \vee B = [1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,]$ $\quad A \times B = [1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,]$
$B \times A = [1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,]$

49. $A \wedge B = [0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,]$ $\quad A \vee B = [0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,]$ $\quad A \times B = [0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,]$
$B \times A = [1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,]$

51. Προκειμένου να ισχύει $A \vee B = A \wedge B$, θα πρέπει $a_{ij} \vee b_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$ για κάθε i, j. Αυτό είναι αληθές αν $a_{ij} = b_{ij} = 1$ ή $a_{ij} = b_{ij} = 0$, συνεπώς όταν $A = B$.

53. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

55. α. Οι γραμμές του επαυξημένου πίνακα καθώς αυτός μετασχηματίζεται έχουν μήκος $n + 1, n, n - 1, \dots, 3$. (Ο επαυξημένος πίνακας έχει μέγεθος $n \times (n + 1)$ και η προτελευταία γραμμή είναι η τελευταία για την οποία απαιτείται ένας τέτοιος πολλαπλασιασμός προκειμένου να μηδενιστεί η θέση $n, n - 1$ στην τελευταία γραμμή.) Κάθε μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το βαθμωτό μέγεθος, διαδικασία που απαιτεί συνολικά $(n + 1) + n + (n - 1) + \cdots + 3$ πολλαπλασιασμούς, δηλαδή $(n + 1) + n + (n - 1) + \cdots + 3 - (2 + 1)$ πολλαπλασιασμούς, το οποίο ισούται με
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3.$$

β. Για να μηδενίσουμε την πρώτη στήλη, πρέπει να προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής (μήκους $n + 1$) σε κάθε γραμμή κάτω από αυτήν και η διαδικασία αυτή απαιτεί $(n + 1)$ πολλαπλασιασμούς και $(n + 1)$ προσθέσεις για $n - 1$ γραμμές. Για να μηδενίσουμε τη δεύτερη στήλη, πρέπει να προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής (μήκους n) σε κάθε γραμμή κάτω από αυτήν και η διαδικασία αυτή απαιτεί n πολλαπλασιασμούς και n προσθέσεις για $n - 2$ γραμμές. Ο τελευταίος μετασχηματισμός απαιτεί την πρόσθεση ενός πολλαπλασίου της προτελευταίας γραμμής (μήκους 3) στη 1 γραμμή που βρίσκεται κάτω από αυτήν και η διαδικασία αυτή απαιτεί 3 πολλαπλασιασμούς και 3 προσθέσεις για 1 γραμμή. Τα σύνολα είναι $(n + 1)(n - 1) + n(n - 2) + \cdots + 3 \cdot 1$ και για τους πολλαπλασιασμούς και για τις προσθέσεις και η έκφραση αυτή (από την άσκηση 11 της παραγράφου 2.2) ισούται με
$$\frac{(n-1)n(2(n-1)+7)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}.$$

γ. Για να λύσουμε τις εξισώσεις από κάτω προς τα πάνω απαιτούνται:
Γραμμή n: $c_{nn}x_n = d_n$ $\quad$ 1 πολλαπλασιασμός
Γραμμή $n - 1$: $c_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + c_{(n-1)n}x_n = d_{n-1}$ $\quad$ 1 πολλαπλασιασμός, 1 πρόσθεση, 1 πολλαπλασιασμός.
Γραμμή $n - 2$: $c_{(n-2)(n-2)}x_{n-2} + c_{(n-2)(n-1)}x_{n-1} + c_{(n-2)n}x_n = d_{n-2}$ $\quad$ 2 πολλαπλασιασμοί, 2 προσθέσεις, 1 πολλαπλασιασμός.

$\vdots$

Γραμμή 1: $c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1$ $(n-1)$ πολλαπλασιασμοί, $(n-1)$ προσθέσεις, 1 πολλαπλασιασμός.

Συνολικά απαιτούνται

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

πολλαπλασιασμοί και

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

προσθέσεις.

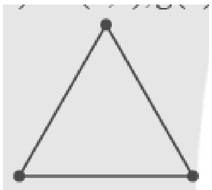
δ. Ο μετασχηματισμός απαιτεί $\Theta(n^2) + 2\Theta(n^3)$ πράξεις και η επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν απαιτεί $2\Theta(n^2)$ πράξεις, οπότε η συνολική τάξη μεγέθους είναι $\Theta(n^3)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

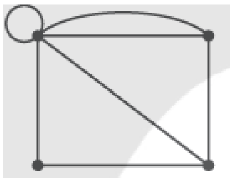
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.1

1. $g(a) = (1,2),\ g(b) = (1,3),\ g(c) = (2,3),\ g(d) = (2,2)$.

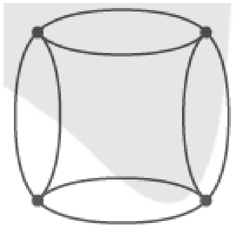
3. α.



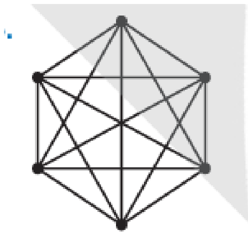
β. Για παράδειγμα,



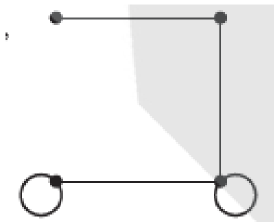
γ.



5.

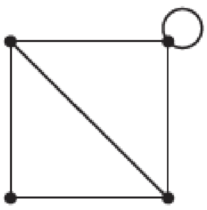


7. α. Για παράδειγμα,



β. Δεν υπάρχει. Ο κόμβος βαθμού 4 θα έπρεπε να έχει ακμές που πηγαίνουν σε 4 άλλους διακεκριμένους κόμβους αφού δεν επιτρέπονται βρόχοι ή παράλληλες ακμές, αλλά δεν υπάρχουν 4 άλλοι διακεκριμένοι κόμβοι.

γ.



δ. Δεν υπάρχει. Σε ένα τέτοιο γράφημα, το άθροισμα όλων των βαθμών θα ήταν 11. Όμως το άθροισμα όλων των βαθμών είναι ο συνολικός αριθμός των άκρων των ακμών, ο οποίος πρέπει να είναι ο διπλάσιος του αριθμού των ακμών, δηλαδή άρτιος αριθμός.

9. α. Εφόσον ο κάθε εργαζόμενος σε ένα τμήμα προφανώς γνωρίζει κάποιον στο ίδιο τμήμα, αυτό θα σήμαινε ότι κανένας εργαζόμενος στο τμήμα IT δεν γνωρίζει κάποιον από το τμήμα μάρκετινγκ (και αντιστρόφως).

β. Οι Carl και Fletcher δεν γνωρίζονται. Ο SiuYin γνωρίζεται μόνο με τον Carl.

γ. 2

11. Για παράδειγμα:

α. star → idol → statue → sculpture
αστέρι → είδωλο → άγαλμα → γλυπτό

β. burden → load → weight → influence
βάρος → φορτίο → βάρος → επιρροή

γ. piano → upright → moral → significance
πιάνο → όρθιος → θνητός → σημασία

13. Το (β) επειδή δεν υπάρχει κόμβος βαθμού 0.

15. $f_1: 1 \to a, 2 \to b, 3 \to c, 4 \to d$, $\quad f_2: a_1 \to e_2, a_2 \to e_7, a_3 \to e_6, a_4 \to e_1, a_5 \to e_3, a_6 \to e_4, a_7 \to e_5$.

17. $f: 1 \to a, 2 \to d, 3 \to b, 4 \to e, 5 \to c$.

19. Τα γραφήματα δεν είναι ισομορφικά. Το γράφημα (β) έχει έναν κόμβο βαθμού 5 ενώ το γράφημα (α) δεν έχει.

21. α. Δεν μπορεί να υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση ανάμεσα στα δύο σύνολα κόμβων αν αυτά δεν έχουν το ίδιο μέγεθος.

β. Για δύο ισομορφικά γραφήματα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το ένα σύνολο ακμών στο άλλο, είτε ρητά είτε, στην περίπτωση των απλών γραφημάτων, σιωπηρά μέσω των άκρων των ακμών. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει αν τα τα δύο σύνολα ακμών δεν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

γ. Αν τα γραφήματα είναι ισομορφικά και αν οι ακμές a_1 και a_2 στο ένα γράφημα αμφότερες έχουν άκρα $x - y$, τότε οι εικόνες των ακμών αυτών στο δεύτερο γράφημα πρέπει να έχουν τα ίδια άκρα, το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει αν το δεύτερο γράφημα δεν έχει παράλληλες ακμές.

δ. Αν τα γραφήματα είναι ισομορφικά και μια ακμή στο ένα γράφημα έχει άκρα $x - x$, τότε η εικόνα της ακμής αυτής στο δεύτερο γράφημα θα πρέπει να έχει άκρα $f(x) - f(x)$, το οποίο είναι αδύνατον αν το δεύτερο γράφημα δεν έχει βρόχους.

ε. Αν τα γραφήματα είναι ισομορφικά και ένας κόμβος βαθμού k στο ένα γράφημα αποτελεί το άκρο k ακμών, τότε η εικόνα του στο δεύτερο γράφημα πρέπει να αποτελεί άκρο για τις εικόνες εκείνων των k ακμών, το οποίο συνεπάγεται ότι η εικόνα του θα έχει επίσης βαθμό k.

στ. Αν τα γραφήματα είναι ισομορφικά και αν υπάρχει μονοπάτι $n_1, a_1, n_2, a_2, \ldots, n_k$ μεταξύ δύο κόμβων στο ένα γράφημα, τότε το $f(n_1), f(a_1), f(n_2), f(a_2), \ldots, f(n_k)$ είναι ένα μονοπάτι στο δεύτερο γράφημα. Δύο κόμβοι του δεύτερου γραφήματος είναι οι εικόνες δύο κόμβων του πρώτου γραφήματος. Αν το πρώτο γράφημα είναι συνεκτικό, τότε υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των κόμβων αυτών και συνεπώς υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των δύο κόμβων του δεύτερου γραφήματος.

ζ. Από την απάντηση στο ερώτημα (στ), σε δύο ισομορφικά γραφήματα τα μονοπάτια απεικονίζονται σε μονοπάτια, οπότε οι κύκλοι απεικονίζονται σε κύκλους.

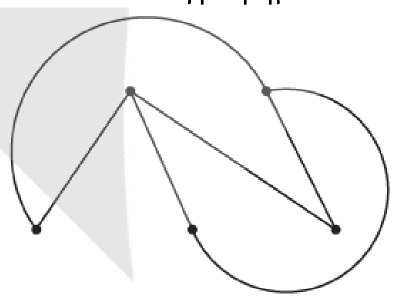
23. 4 γραφήματα:

25.

$$\frac{n(n-1)}{2} = C(n,2)$$

27. Αν μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα έτσι ώστε οι ακμές να τέμνονται μόνο στους κόμβους, τότε αυτό είναι ένα επίπεδο γράφημα.

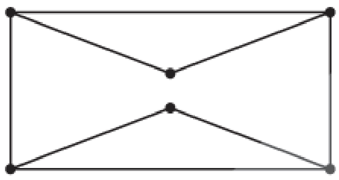
$K_{2,3}$:



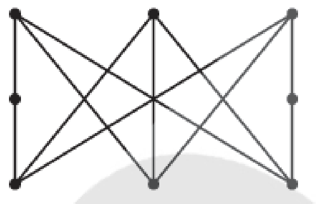
29. 5

31. Η απόδειξη του τύπου του Euler δεν εξαρτάται από το αν το γράφημα είναι απλό, οπότε το αποτέλεσμα συνεχίζει να ισχύει και για μη απλά γραφήματα, όμως αυτό δεν συμβαίνει με τις ανισότητες (2) και (3).

33. Επίπεδο γράφημα.



35. Μη επίπεδο γράφημα. Το υπογράφημα μπορεί να προκύψει από το $K_{3,3}$ μέσω στοιχειωδών υποδιαιρέσεων.



37.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

39.

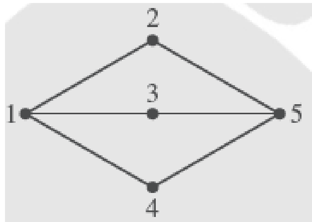
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

41.

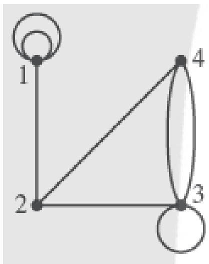
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

43.

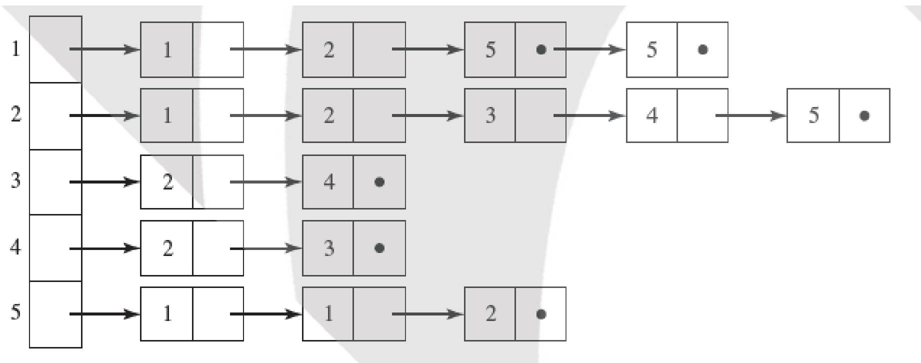
45.



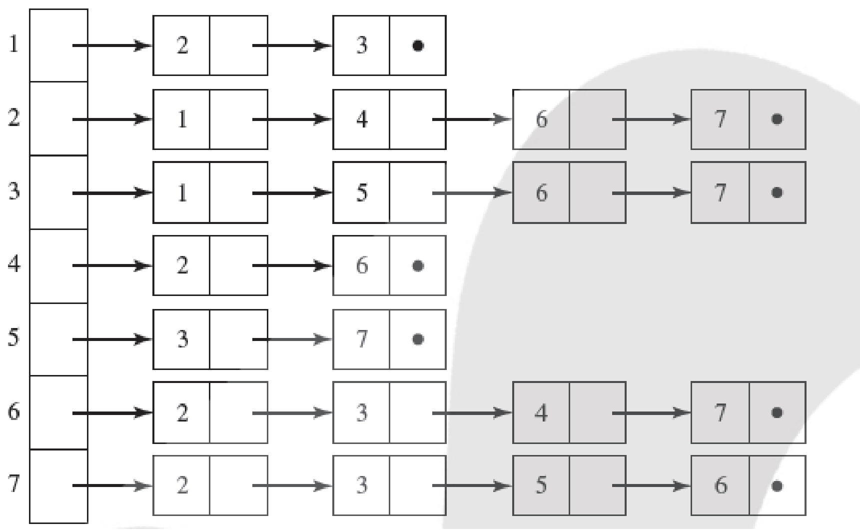
47.



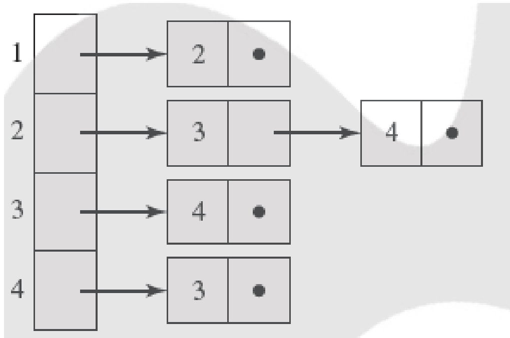
49. Το γράφημα αποτελείται από n ασύνδετους κόμβους με έναν βρόχο σε κάθε κόμβο.
51. Ο $n \times n$ πίνακας με 0 κατά μήκος της κύριας διαγωνίου και 1 οπουδήποτε αλλού.
53.



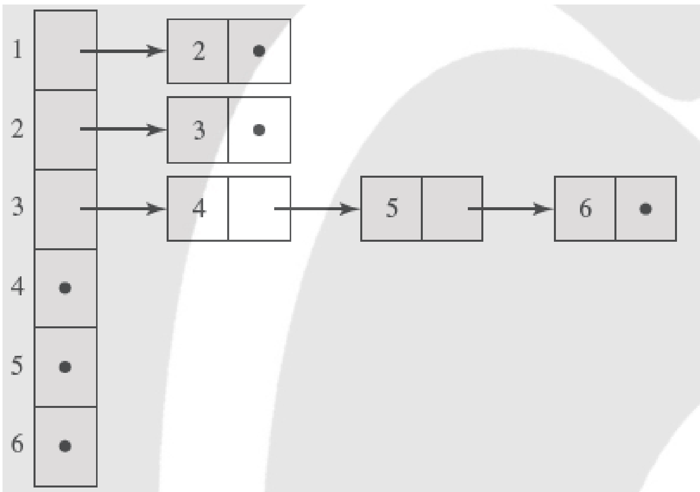
55.



57.



59. α.



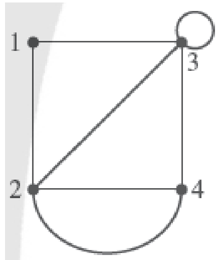
β. 16 γ. 36

61.

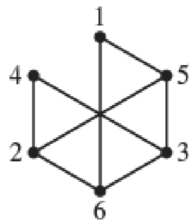
	Κόμβος	Δείκτης
1		5
2		7
3		11
4		0
5	2	6
6	3	0

7	1	8
8	2	9
9	3	10
10	4	0
11	4	0

63.



65.



67. Από τον ορισμό των ισομορφικών γραφημάτων, οι κόμβοι $x - y$ είναι γειτονικοί στο G_1 αν και μόνο αν οι εικόνες τους είναι γειτονικοί κόμβοι στο G_2. Επομένως, δύο κόμβοι δεν είναι γειτονικοί στο G_1 (και συνεπώς είναι γειτονικοί στο G_1') αν και μόνο οι εικόνες τους δεν είναι γειτονικοί κόμβοι στο G_2 (και συνεπώς είναι γειτονικοί στο G_2'). Άρα, η ίδια συνάρτηση f κάνει τα συμπληρωματικά γραφήματα ισομορφικά.

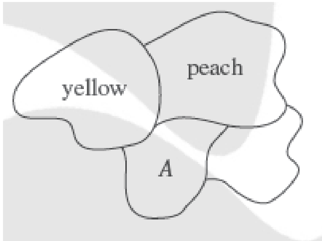
69. Αν το G δεν είναι συνεκτικό, τότε το G αποτελείται από δύο ή περισσότερα συνεκτικά υπογραφήματα που δεν έχουν μονοπάτια μεταξύ τους. Έστω x και y δύο διακεκριμένοι κόμβοι. Αν οι x και y βρίσκονται σε διαφορετικά υπογραφήματα, τότε δεν υπάρχει ακμή $x - y$ στο G. Άρα, υπάρχει ακμή $x - y$ στο G' και υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y στο G'. Αν οι x και y βρίσκονται στο ίδιο υπογράφημα, τότε επιλέγουμε έναν κόμβο z σε ένα διαφορετικό υπογράφημα. Υπάρχει ακμή $x - z$ στο G' και ακμή $z - y$ στο G', συνεπώς υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y στο G'.

71. Ο πίνακας για το G' θα έχει 1 όπου ο A είχε 0 και 0 όπου ο A είχε 1 εκτός από τα διαγώνια στοιχεία, τα οποία παραμένουν 0.

73. Ο μέγιστος αριθμός των ακμών εμφανίζεται σε ένα πλήρες γράφημα. Ο μέγιστος αριθμός είναι $C(n, 2) = n(n-1)/2$, συνεπώς $a \le n(n-1)/2$ ή $2a \le n^2 - n$.

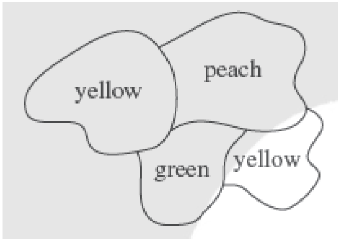
75. Έστω G ένα απλό γράφημα με n κόμβους, $n \ge 2$, και m ακμές, $m > C(n-1, 2) = (n-1)(n-2)/2$, για το οποίο υποθέτουμε ότι δεν είναι συνεκτικό. Από την Άσκηση 69, το G' είναι συνεκτικό. Από την Άσκηση 74, ο αριθμός των ακμών στο G' είναι τουλάχιστον $n-1$. Επομένως, ο αριθμός m των ακμών στο G είναι (ο αριθμός των ακμών ενός πλήρους γραφήματος) – (ο αριθμός των ακμών του G')$= n(n-1)/2$ – (ο αριθμός των ακμών του G') $\le n(n-1)/2 - (n-1) = (n-1)(n/2-1) = (n-1)(n-2)/2$ το οποίο αποτελεί αντίφαση.

77. Απαιτούνται τουλάχιστον τρία χρώματα εξαιτίας των επικαλυπτόμενων συνόρων. Αφού γίνει η ακόλουθη εκχώρηση χρωμάτων, η χώρα που έχει σημειωθεί με το A πρέπει να χρωματιστεί με ένα τρίτο χρώμα:



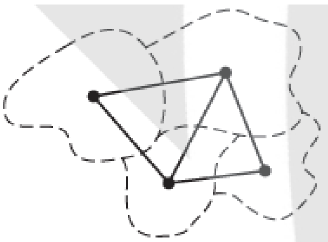
κίτρινο, ροδακινί

Τρία χρώματα είναι αρκετά:

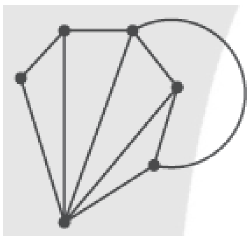


κίτρινο, ροδακινί, πράσινο, κίτρινο

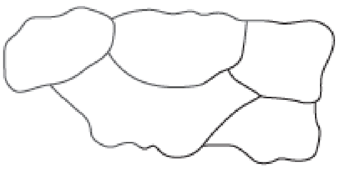
79. α.



β.

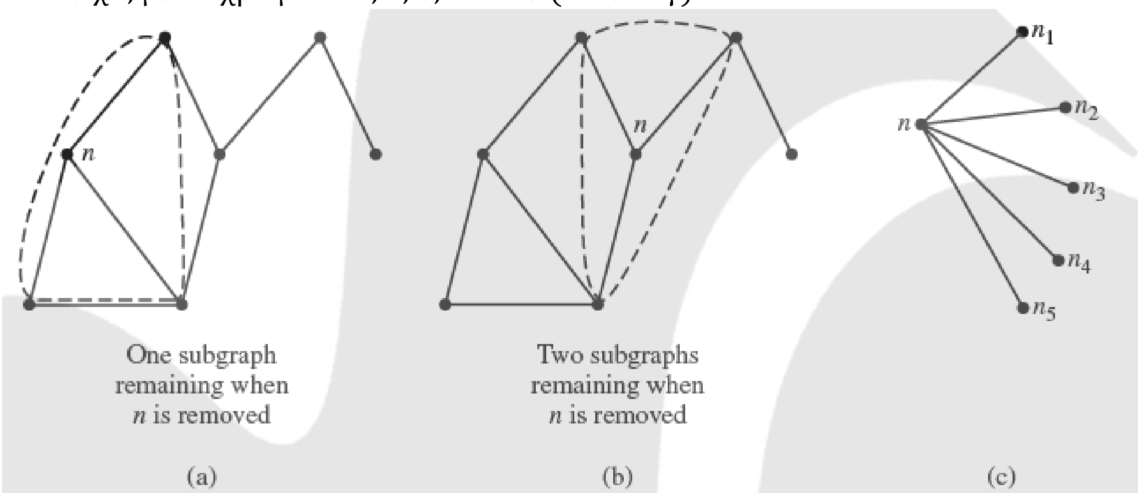


γ.



81. Η εικασία των τεσσάρων χρωμάτων είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι ο χρωματικός αριθμός οποιουδήποτε απλού, συνεκτικού, επίπεδου γραφήματος είναι το πολύ 4.

83. Η απόδειξη γίνεται με μαθηματική επαγωγή επί του αριθμού των κόμβων του γραφήματος. Για το βήμα βάσης της επαγωγής, είναι προφανές ότι πέντε χρώματα είναι αρκετά αν ο αριθμός των κόμβων είναι μικρότερος ή ίσος του 5. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι οποιοδήποτε απλό, συνεκτικό, επίπεδο γράφημα με (λιγότερους ή ίσους) $\leq k$ κόμβους μπορεί να χρωματιστεί με πέντε χρώματα και θεωρούμε ένα τέτοιο γράφημα με $k+1$ κόμβους. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $k+1$ είναι τουλάχιστον 6 αφού έχουμε ήδη μεριμνήσει για την περίπτωση των 5 ή λιγότερων κόμβων. Από την Άσκηση 82, τουλάχιστον ένας κόμβος n του γραφήματος έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5. Αφαιρώντας προσωρινά τον κόμβο n (καθώς και τις συνδετήριες ακμές του) από το γράφημα, θα απομείνει μια συλλογή ενός ή περισσοτέρων απλών, συνεκτικών, επίπεδων υπογραφημάτων με το κάθε ένα από αυτά να μην έχει περισσότερους από k κόμβους (Εικόνες α και β). Από την επαγωγική υπόθεση, κάθε υπογράφημα μπορεί να χρωματιστεί με πέντε το πολύ χρώματα (χρησιμοποιούμε την ίδια παλέτα πέντε χρωμάτων για κάθε υπογράφημα). Τώρα εξετάζουμε ξανά το αρχικό γράφημα. Αν ο κόμβος n έχει βαθμό μικρότερο από 5 ή αν οι 5 γειτονικοί κόμβοι του n δεν χρησιμοποιούν 5 διαφορετικά χρώματα, απομένει ένα πέμπτο χρώμα ώστε να χρησιμοποιηθεί για τον n. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι ο n έχει 5 γειτονικούς κόμβους, τους n_1, n_2, n_3, n_4 και n_5, διευθετημένους γύρω από τον n σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού οι οποίοι έχουν χρωματιστεί, αντίστοιχα, με τα χρώματα 1, 2, 3, 4 και 5 (Εικόνα γ).



(α) όταν ο n αφαιρεθεί απομένει ένα υπογράφημα.
(β) όταν ο n αφαιρεθεί απομένουν δύο υπογραφήματα.
(γ)

Επιλέγουμε τώρα όλους τους κόμβους του γραφήματος που έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα 1 ή 3. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει μονοπάτι, που να χρησιμοποιεί ακριβώς αυτούς τους κόμβους, μεταξύ των κόμβων n_1 και n_3. Τότε, όσον αφορά τους κόμβους που έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα 1 και 3, υπάρχουν δύο ξεχωριστά τμήματα του γραφήματος, ένα τμήμα που περιέχει τον n_1 και ένα τμήμα που περιέχει τον n_3. Στο τμήμα που περιέχει τον n_1, ανταλλάσσουμε τα χρώματα 1 και 3 σε όλους τους κόμβους. Κάνοντάς το αυτό δεν παραβιάζουμε τον (σωστό) χρωματισμό των κόμβων, αφού χρωματίζουμε τον n_1 με το χρώμα 3 και αφήνουμε το χρώμα 1 για τον n_3. Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των κόμβων n_1 και n_3 που χρησιμοποιεί μόνο κόμβους που έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα 1 ή 3. Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε όλους τους κόμβους του αρχικού γραφήματος που έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα 2 ή 4. Υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των κόμβων n_2 και n_4 που χρησιμοποιεί μόνο τέτοιους κόμβους; Όχι, δεν υπάρχει. Εξαιτίας της διευθέτησης των κόμβων n_1, n_2, n_3, n_4 και n_5, ένα τέτοιο μονοπάτι θα έπρεπε να τέμνει το μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους n_1 και n_3. Εφόσον το γράφημα είναι επίπεδο, τα δύο αυτά μονοπάτια θα έπρεπε να συναντιούνται σε έναν κόμβο, ο οποίος τότε θα είχε χρωματιστεί με το χρώμα 1 ή 3 λόγω του μονοπατιού $n_1 - n_3$ και με το χρώμα 2 ή 4 λόγω του μονοπατιού $n_2 - n_4$, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, δεν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των κόμβων n_2 και n_4 που να χρησιμοποιεί μόνο κόμβους που έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα 2 ή 4 και έτσι μπορούμε να ανταλλάξουμε τα χρώματα όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

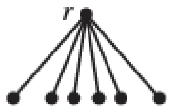
85. Τέσσερα, τρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.2

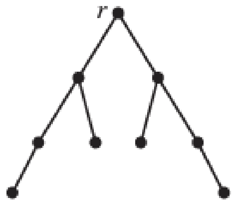
1. α. Ναι, είναι δέντρο. Τοποθετούμε τη ρίζα στην κορυφή.

β. Δεν είναι δέντρο καθώς υπάρχει κύκλος.

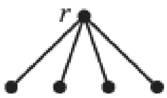
γ. Ναι, είναι δέντρο. Τοποθετούμε τη ρίζα στην κορυφή και τα κλαδιά πέφτουν προς τα κάτω.



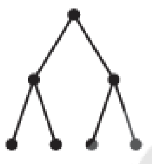
δ. Ναι, είναι δέντρο. Ρίχνουμε προς τα κάτω τα χαμηλότερα κλαδιά.



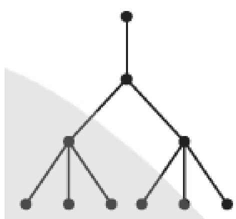
3. α.



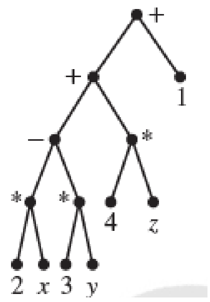
β.



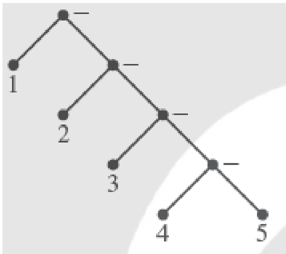
γ.



5.



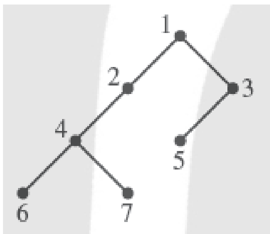
7.



9.

	Δεξί παιδί	Αριστερό παιδί
1	2	3
2	0	4
3	5	6
4	7	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0

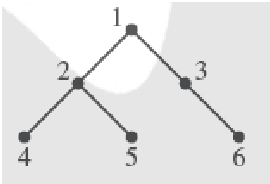
11.



13.

	Όνομα	Δεξί παιδί	Αριστερό παιδί
1	All	0	2
2	Gaul	3	4
3	divided	0	0
4	is	5	6
5	into	0	0
6	three	7	0
7	parts	0	0

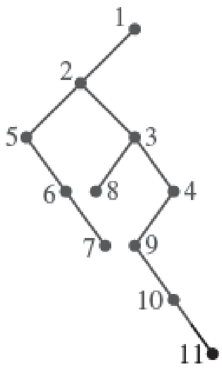
15.



17. α.

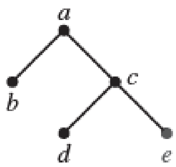
	Αριστερό παιδί	Δεξιός αδερφός
1	2	0
2	5	3
3	8	4
4	9	0
5	0	6
6	0	7
7	0	0
8	0	0
9	0	10
10	0	11
11	0	0

β.

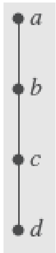


19. ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: $a\ b\ d\ e\ h\ f\ c\ g$
ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: $d\ b\ h\ e\ f\ a\ g\ c$
μεταδιατεταγμένη διάσχιση: $d\ h\ e\ f\ b\ g\ c\ a$
21. ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: $a\ b\ e\ c\ f\ j\ g\ d\ h\ i$
ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: $e\ b\ a\ j\ f\ c\ g\ h\ d\ i$
μεταδιατεταγμένη διάσχιση: $e\ b\ j\ f\ g\ c\ h\ i\ d\ a$
23. ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: $a\ b\ c\ e\ f\ d\ g\ h$
ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: $e\ c\ f\ b\ g\ d\ h\ a$
μεταδιατεταγμένη διάσχιση: $e\ f\ c\ g\ h\ d\ b\ a$
25. προθεματικός συμβολισμός: $+/\ 3\ 4 - 2\ y$
μεταθεματικός συμβολισμός: $3\ 4\ /\ 2\ y - +$
27. ενθεματικός συμβολισμός: $\big((2+3)*(6*x)\big)-7$
μεταθεματικός συμβολισμός: $2\ 3\ +\ 6\ x\ *\ *\ 7\ -$
29. προθεματικός συμβολισμός: $+\ *\ 4\ -\ 7\ x\ z$
ενθεματικός συμβολισμός: $\big(4*(7-x)\big)+z$
31. 10

33.



35.



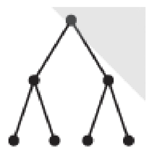
37. Αν η ρίζα δεν έχει ούτε αριστερό παιδί ούτε δεξί παιδί, επίστρεψε το 0 ως ύψος του δέντρου, αλλιώς κάλεσε τον αλγόριθμο στο αριστερό παιδί αν αυτό υπάρχει, κάλεσε τον αλγόριθμο στο δεξί παιδί αν αυτό υπάρχει, επίστρεψε τη μεγαλύτερη από αυτές τις δύο τιμές συν 1.

39. Θεωρούμε ένα απλό γράφημα που είναι δέντρο χωρίς ρίζα. Ένα δέντρο είναι ένα ακυκλικό και συνεκτικό γράφημα, οπότε για οποιουσδήποτε δύο κόμβους x και y, υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y. Αν το μονοπάτι δεν είναι μοναδικό, τότε τα δύο μονοπάτια αποκλίνουν σε κάποιον κόμβο n_1 και συγκλίνουν σε κάποιον κόμβο n_2, οπότε υπάρχει κύκλος από τον κόμβο n_1 μέσω του n_2 και πίσω στον n_1, το οποίο αποτελεί αντίφαση. Θεωρούμε τώρα ένα απλό γράφημα που έχει ένα μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων. Το γράφημα είναι προφανώς συνεκτικό. Επίσης, δεν υπάρχουν κύκλοι αφού η παρουσία ενός κύκλου δημιουργεί δύο μονοπάτια μεταξύ δύο κόμβων πάνω στον κύκλο. Επομένως, το γράφημα είναι ακυκλικό και συνεκτικό οπότε είναι δέντρο χωρίς ρίζα.

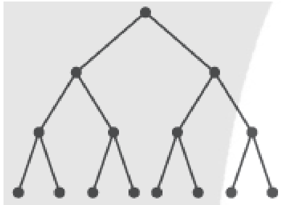
41. Αν το G είναι δέντρο χωρίς ρίζα, τότε το G είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι αφαιρώντας μια ακμή a μεταξύ των κόμβων n_1 και n_2 το G παραμένει συνεκτικό. Τότε υπάρχει μονοπάτι μεταξύ από τον n_1 στον n_2. Προσθέτοντας την ακμή a στο μονοπάτι αυτό προκύπτει ένας κύκλος από τον n_1 στον n_1, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με τον ορισμό ενός δέντρου. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό και η αφαίρεση οποιασδήποτε ακμής κάνει το G μη συνεκτικό. Αν το G δεν είναι δέντρο, τότε περιέχει κύκλο. Αν αφαιρεθεί μια ακμή από τον κύκλο, το γράφημα παραμένει συνεκτικό αφού οποιοδήποτε μονοπάτι χρησιμοποιούσε την ακμή που αφαιρέθηκε μπορεί αντί αυτής να χρησιμοποιήσει το υπόλοιπο του κύκλου. Αυτό αποτελεί αντίφαση, οπότε το G είναι δέντρο χωρίς ρίζα.

43. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο d. Για $d = 0$, ο μόνος κόμβος είναι η ρίζα και $2^0 = 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν το πολύ 2^d κόμβοι σε βάθος d και εξετάζουμε το βάθος $d + 1$. Υπάρχουν το πολύ δύο παιδιά για κάθε κόμβο σε βάθος d, οπότε ο μέγιστος αριθμός κόμβων σε βάθος $d + 1$ είναι $2 \cdot 2^d = 2^{d+1}$.

45. α. 7 κόμβοι.



β. 15 κόμβοι.



γ. $2^{h+1} - 1$.

47. α. Σε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο, όλοι οι εσωτερικοί κόμβοι έχουν δύο παιδιά, οπότε ο συνολικός αριθμός των «κόμβων – παιδιά» είναι $2x$. Ο μοναδικός «μη παιδί» κόμβος είναι η ρίζα, οπότε υπάρχουν συνολικά $2x + 1$ κόμβοι.

β. Από το ερώτημα (α), υπάρχουν συνολικά $2x + 1$ κόμβοι, x από τους οποίους είναι εσωτερικοί, αφήνοντας $2x + 1 - x = x + 1$ φύλλα.

γ. Θεωρούμε ένα πλήρες δυαδικό δέντρο με n κόμβους. Έστω x ο αριθμός των εσωτερικών κόμβων. Από το ερώτημα (α), $n = 2x + 1$. Επομένως, $x = (n-1)/2$. Από το ερώτημα (β), ο αριθμός των φύλλων είναι $x + 1 = (n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$.

49. Από την Άσκηση 45, ένα πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους $h - 1$ έχει $2^h - 1$ κόμβους. Όταν $n = 2^h$, αυτή είναι η αρχή του επιπέδου h. Το ύψος h παραμένει το ίδιο έως ότου $n = 2^{h+1}$ όταν και αυξάνεται κατά 1. Επομένως, για $2^h \le n < 2^{h+1}$, το ύψος του δέντρου παραμένει το ίδιο και δίνεται από τη σχέση $h = \lfloor \log n \rfloor$.

51. 2

53. α. Υπάρχει μόνο ένα δυαδικό δέντρο με έναν μόνο κόμβο, οπότε $B(1) = 1$. Για ένα δυαδικό δέντρο με n κόμβους, $n > 1$, το «σχήμα» του δέντρου καθορίζεται από το «σχήμα» του αριστερού και του δεξιού υποδέντρου. Τα δύο υποδέντρα έχουν συνολικά $n - 1$ κόμβους. Έστω ότι το αριστερό υποδέντρο έχει k κόμβους. Τότε το δεξί υποδέντρο έχει $n - 1 - k$ κόμβους. Το k μπορεί να εκτείνεται από 0 έως $n - 1$. Για κάθε τιμή του k, υπάρχουν $B(k)$ τρόποι για να σχηματίσουμε το αριστερό υποδέντρο, έπειτα υπάρχουν $B(n - 1 - k)$ τρόποι για να σχηματίσουμε το δεξί υποδέντρο, οπότε από την αρχή του γινομένου, υπάρχουν $B(k)B(n - 1 - k)$ διαφορετικά δέντρα.

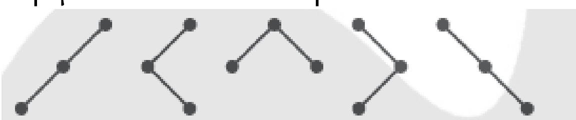
β.

$$B(0) = 1, B(1) = 1, B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} B(k)B(n-1-k) = \sum_{k=1}^{n} B(k-1)B(n-k)$$

η οποία είναι ίδια με την ακολουθία των Καταλανικών αριθμών, οπότε από την Άσκηση 97 της Ενότητας 4.4,

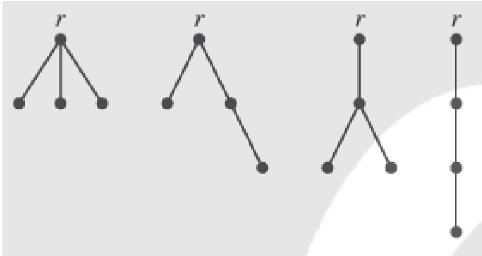
$$B(n) = \frac{1}{n+1} C(2n, n).$$

γ. $B(3) = 5$. Τα 5 διακεκριμένα δυαδικά δέντρα είναι

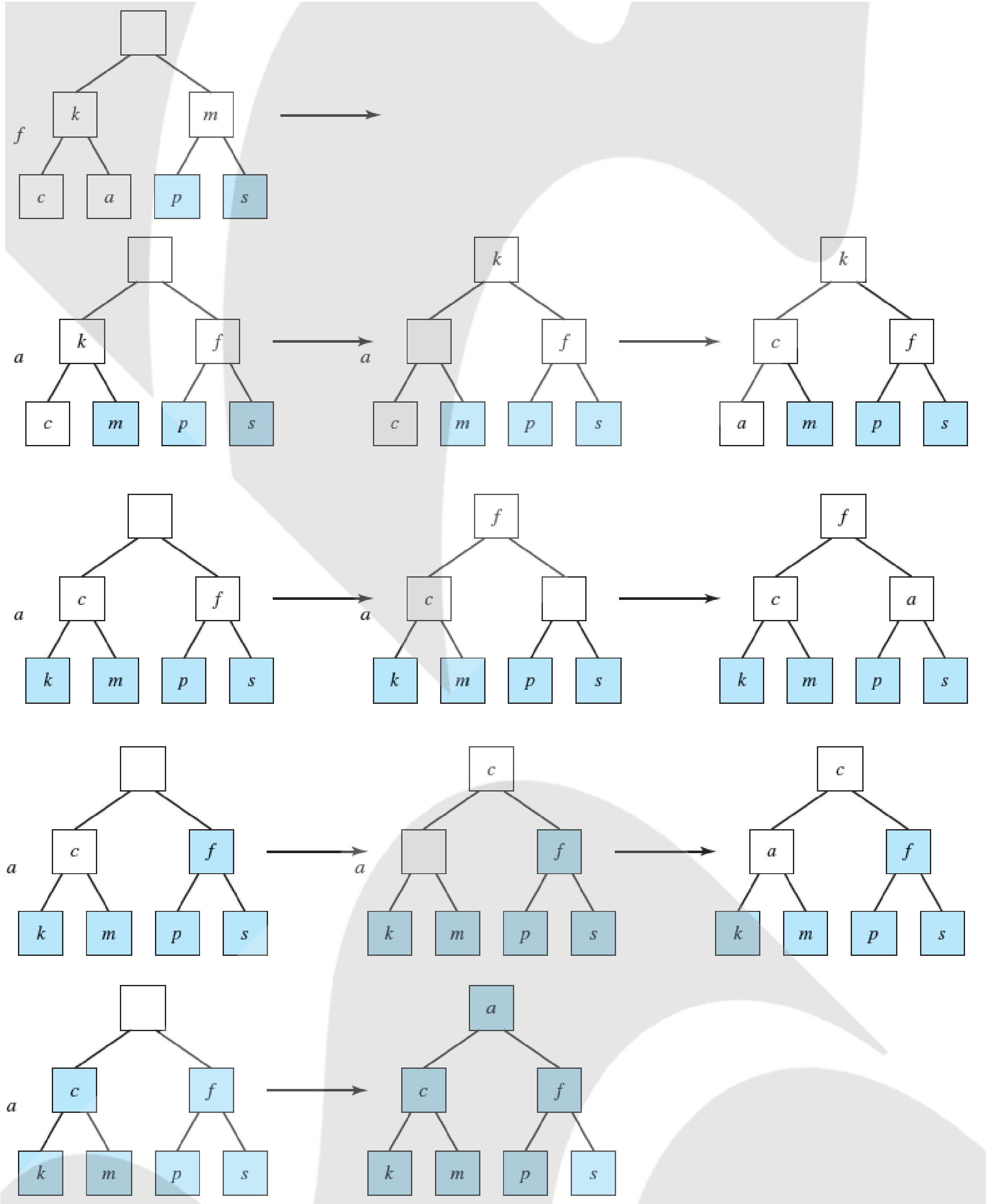


δ. $B(6) = 132$.

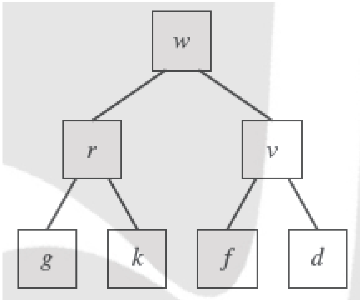
55.



57. α.

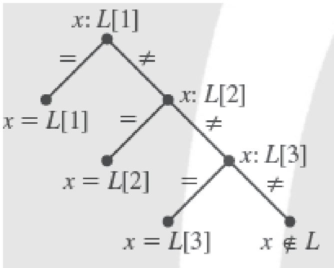


β. Ο πίνακας, όταν διευθετηθεί ξανά σε σωρό (που δεν έχει ακόμα ταξινομηθεί) θα ήταν

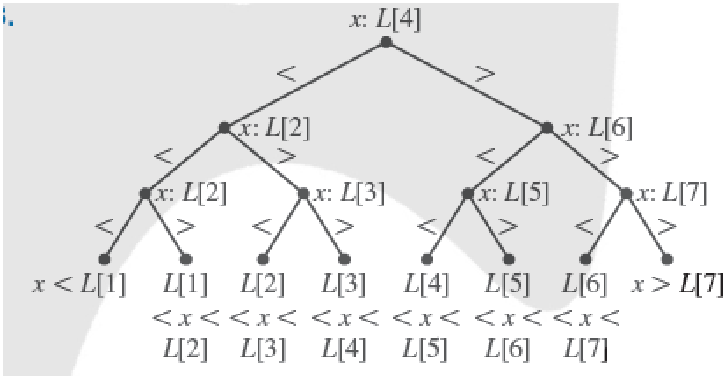


ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.3

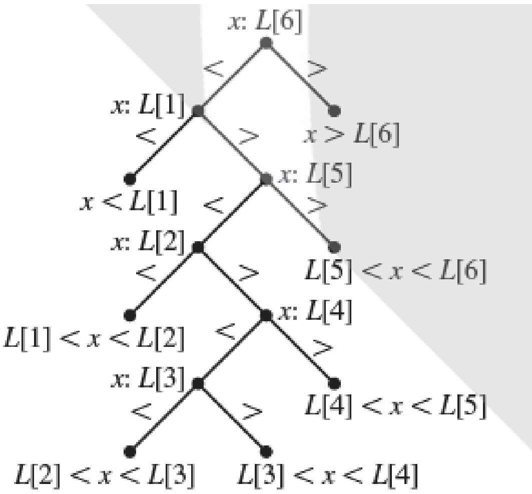
1.



3.

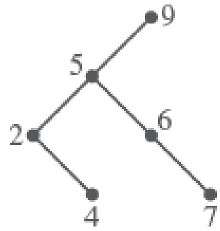


5.



βάθος $= 6$. Ο αλγόριθμος δεν είναι βέλτιστος επειδή $6 > 1 + \log\lfloor 6 \rfloor = 3$.

7. α.



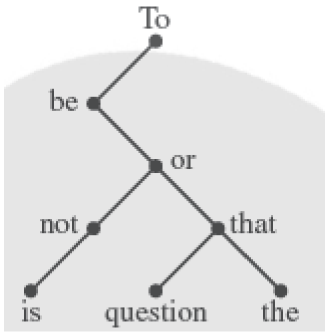
βάθος $= 3 = 1 + \lfloor \log 7 \rfloor$.

β. μέσος αριθμός συγκρίσεων $\cong 2{,}83$.

9. α. 3

β. Για παράδειγμα: g, d, a, k, i, s.

11.



Ενδοδιατεταγμένη διάσχιση: «Be is not or question that the To»

13. α. 5

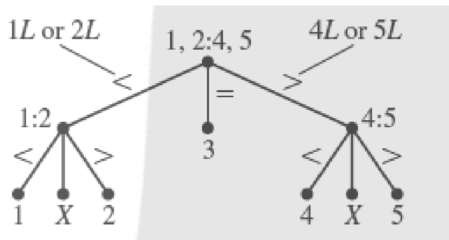
β. 16

γ. 45

15. α. 5

β. 2

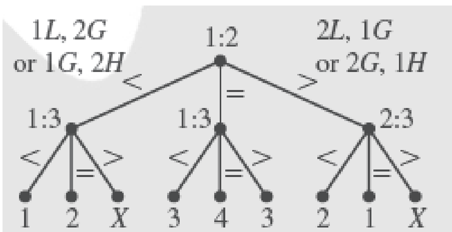
γ.



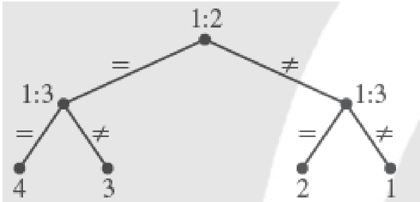
17. α. 4

β. 2

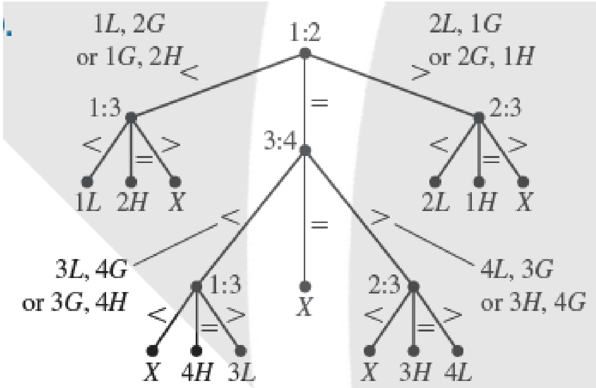
γ.



Το πρόβλημα αυτό (εφόσον δεν χρειάζεται να αποφασίσουμε αν το πλαστό νόμισμα είναι βαρύ ή ελαφρύ) μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί με ένα δυαδικό δέντρο βάθους 2:



19.



21. $2 * (1 + \lfloor \log n \rfloor)$.

23. α.

$$\begin{aligned}\log n! &= \log[n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1] \\ &= \log n + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots + \log 2 + \log 1 \\ &\leq \log n + \log n + \log n + \cdots + \log n \quad \text{για } n \geq 1 = n \log n.\end{aligned}$$

β.

$$\begin{aligned}\log n! &= \log[n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1] \\ &= \log n + \log(n-1) + \log(n-2) + \cdots + \log 2 + \log 1 \\ &\geq \log n + \log(n-1) + \cdots + \log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \geq \log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + \log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + \cdots + \log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \\ &\geq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \log\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \geq \left(\frac{n}{2}\right)\log\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)(\log n - \log 2) = \left(\frac{n}{2}\right)(\log n - 1) \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)\log n - \left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{4}\right)\log n + \left(\frac{n}{4}\right)\log n - \left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \left(\frac{n}{4}\right)\log n + \left(\frac{n}{4}\right)(\log n - 2) \geq \left(\frac{n}{4}\right)\log n\end{aligned}$$

αφού $\log n \geq 2$ για $n \geq 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6.4

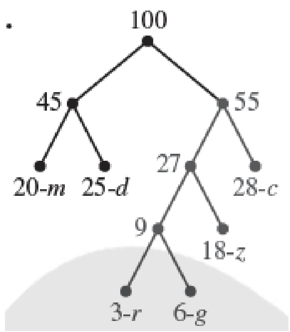
1. Όχι, επειδή ο κώδικας για το m, 01, είναι το πρόθεμα του κώδικα για το d, 011.

3. α. $ooue$ β. $iaou$ γ. eee

5. α. $(pw)a$ β. paw γ. $((a))$

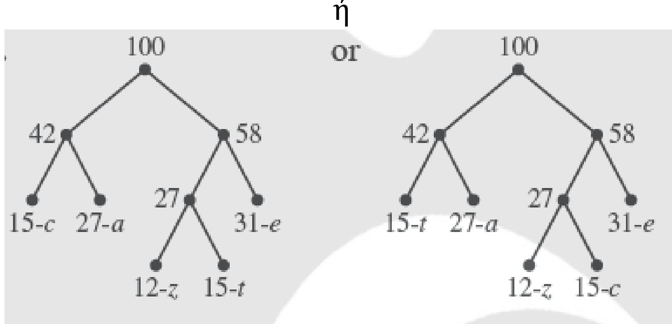
7. $a - 0101,\ b - 011,\ c - 10,\ d - 11$

9. α.



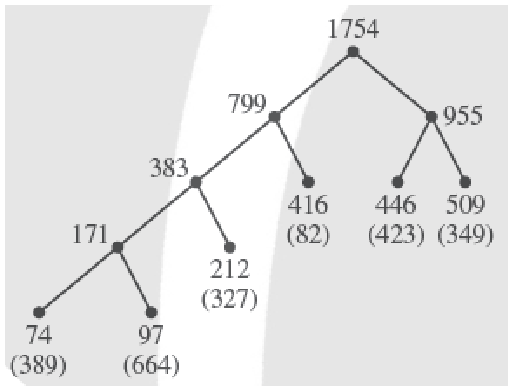
β. $c-11,\ d-01,\ g-1001, m-00,\ r-1000,\ z-101.$

11. α. ή



β. $a-01,\ z-100,\ t-101,\ e-11,\ c-00$ ή
$a-01,\ z-100,\ t-00,\ e-11,\ c-101$

13. α.



β. $82-01,\ 664-0001,\ 327-001,\ 349-11,\ 423-10,\ 389-0000$

15. α. 85.000 bytes β. 34.000 bytes

17. Μία από τις αρκετές δυνατότητες που υπάρχουν είναι:

$s-000,\quad h-001,\quad a-01,\quad t-100,\quad c-101,\quad e-11$

19. α. Ένας πιθανός κώδικας Huffman είναι

$B-110100$	$0-01$	$5-1000$
$C-11101$	$1-101$	$6-010$
$G-1101100$	$2-1001$	$7-1100$
$R-110101$	$3-011$	$8-110111$
$S-1101101$	$4-1111$	$9-11100$

β. Το νέο αρχείο καταλαμβάνει περίπου το 44 τοις εκατό του αποθηκευτικού χώρου του αρχικού αρχείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

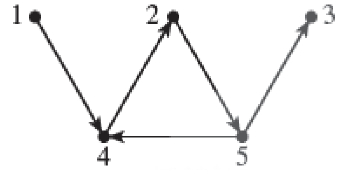
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.1

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

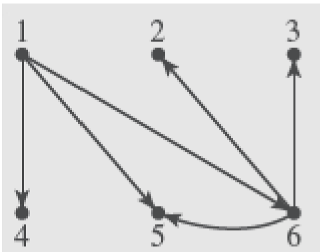
$$\rho = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,2)\}$$

3.



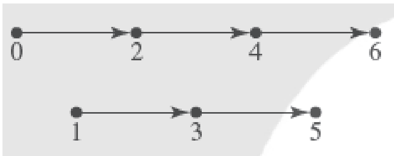
$$\rho = \{(1,4),(2,5),(4,2),(5,3),(5,4)\}$$

5.



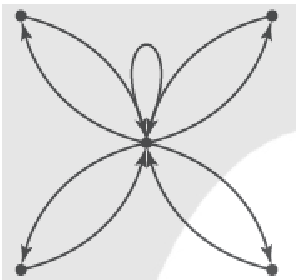
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.



9. Για κάθε ζεύγος κόμβων a και b, αν υπάρχει ακμή από τον a στον b, τότε υπάρχει επίσης ακμή από τον b στον a.

11. Το γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί ως ένα «αστέρι» με τον κόμβο 1 στο κέντρο. Για παράδειγμα, ο 1 είναι γειτονικός με όλους τους κόμβους και όλοι οι κόμβοι είναι γειτονικοί με τον 1, αλλά δεν υπάρχουν άλλοι γειτονικοί κόμβοι. Για παράδειγμα, με $n = 5$ έχουμε το γράφημα:

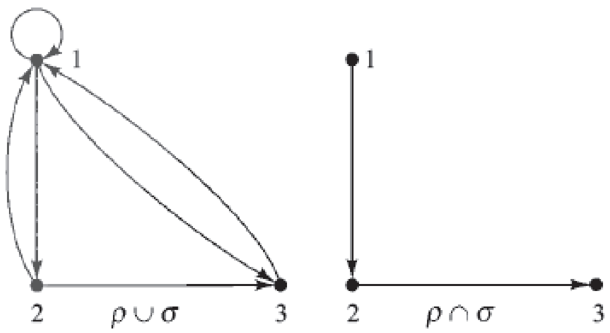


13. Κανένας κόμβος δεν έχει βρόχο.

15.

$$\rho \cup \sigma: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rho \cap \sigma: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17.



19.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Ο πίνακας προσπελασιμότητας **R** θα έχει όλες τις εγγραφές του ίσες με 1.

23.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

25.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

27.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

29.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

31.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

33.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

35.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

37. Μεταβατική κλειστότητα $= \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

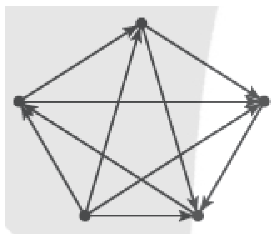
39. α. Προσθέτουμε τα ζεύγη $(2,1)$ και $(3,2)$ στη ρ για να πάρουμε τη μεταβατική κλειστότητα.

β. Η ίδια η ρ είναι η μεταβατική της κλειστότητα.

γ. Προσθέτουμε τα ζεύγη $(1,1),(2,1),(2,2)$ και $(3,3)$ στη ρ για να πάρουμε τη μεταβατική κλειστότητα.

δ. Η ίδια η ρ είναι η μεταβατική της κλειστότητα.

41.



43.

$$\mathbf{A}^2[i,j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}.$$

Αν κάποιος όρος αυτού του αθροίσματος, όπως ο $a_{i2}a_{2j}$, είναι 0, τότε είτε $a_{i2} = 0$ είτε $a_{2j} = 0$ (ή και τα δύο) και είτε δεν υπάρχει μονοπάτι μήκους 1 από τον n_i στον n_2 είτε δεν υπάρχει μονοπάτι μήκους 1 από τον n_2 στον n_j (ή και τα δύο). Άρα δεν υπάρχουν μονοπάτια μήκους 2 από τον n_i στον n_j που να διέρχονται από τον n_2. Αν $a_{i2}a_{2j} \neq 0$, τότε $a_{i2} = p$ και $a_{2j} = q$, όπου οι p, q είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε υπάρχουν p μονοπάτια μήκους 1 από τον n_i στον n_2 και q μονοπάτια μήκους 1 από τον n_2 στον n_j. Από την αρχή του γινομένου, υπάρχουν pq δυνατά μονοπάτια μήκους 2 από τον n_i στον n_j μέσω του n_2. Από την αρχή της άθροισης, το άθροισμα όλων αυτών των όρων μας δίνει όλα τα δυνατά μήκους 2 από τον n_i στον n_j.

45. 3

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.2

1. Όχι, τέσσερις κόμβοι βαθμού 3.
3. Δεν υπάρχουν περιττοί κόμβοι, οπότε ναι. Ένα τέτοιο μονοπάτι μπορεί να ξεκινά από οποιονδήποτε κόμβο και θα τελειώνει εκεί. Για παράδειγμα, 1 – 2 – 6 – 3 – 1 – 4 – 6 – 5 – 1.
5. Όχι, τέσσερις κόμβοι περιττού βαθμού.
7. Δύο περιττοί κόμβοι, οι 1 και 3, οπότε ναι. Ένα τέτοιο μονοπάτι πρέπει να ξεκινά από τον ένα περιττό κόμβο και να τελειώνει στον άλλο. Για παράδειγμα, 1 – 4 – 5 – 1 – 2 – 5 – 6 – 2 – 3 – 6 – 7 – 3.
9. Όχι, έξι κόμβοι περιττού βαθμού.
11. Όχι τέσσερις κόμβοι περιττού βαθμού.
13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το *σύνολο* μετά τη γραμμή 2 είναι 0.
15.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i = 8$.
17. Ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα θα έχει μονοπάτι Euler αν και μόνο αν
(α) για κάθε κόμβο ισχύει ότι ο εισερχόμενος βαθμός του είναι ίσος με τον εξερχόμενο βαθμό του ή
(β) ένας κόμβος, n_p, έχει εξερχόμενο βαθμό κατά 1 μεγαλύτερο από τον εισερχόμενο βαθμό του και ένας άλλος κόμβος, n_q, έχει εισερχόμενο βαθμό κατά 1 μεγαλύτερο από τον εξερχόμενο βαθμό του.
19. Για κάθε κόμβο ισχύει ότι ο εισερχόμενος βαθμός του είναι ίσος με τον εξερχόμενο βαθμό του, οπότε υπάρχει μονοπάτι από έναν αυθαίρετο κόμβο πίσω στον ίδιο κόμβο. Για παράδειγμα, 2 – 4 – 2 – 3 – 1 – 2.
21. Όχι.
23. Ναι. Για παράδειγμα, 1 – 4 – 2 – 6 – 3 – 5 – 1.
25. Ναι. Για παράδειγμα, 1 – 2 – 3 – 7 – 6 – 5 – 4 – 1.
27. Ναι. Για παράδειγμα, 6 – 5 – 8 – 7 – 3 – 4 – 1 – 2 – 6.
29. Οποιοιδήποτε δύο κόμβοι πρέπει να αποτελούν μέρος του κυκλώματος Hamilton. Επομένως, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ αυτών και συγκεκριμένα το μέρος του κυκλώματος που βρίσκεται μεταξύ αυτών.
31. α. $(n-1)^n$
β. $(n-1)(n-2)^{n-1}$
γ. $(n-1)!$

δ. 14! Δευτερόλεπτα ή περίπου 24,22 ώρες.

33. α. $n = 2$ ή $n =$ οποιοσδήποτε περιττός αριθμός.

β. $n > 2$

35. Ένα τέτοιο γράφημα είναι αλυσίδα, οπότε απλά επιλέγουμε έναν κόμβο και έπειτα ακολουθούμε το γύρο της αλυσίδας έως ότου επιστρέψουμε στον κόμβο εκκίνησης.

37. α. Εξετάζουμε κάθε κόμβο του G με τη σειρά. Σε κάθε κόμβο προσθέτουμε όσες περισσότερες νέες ακμές είναι δυνατόν χωρίς να δημιουργήσουμε κύκλωμα. Η διαδικασία αυτή τερματίζεται αφού το πλήρες γράφημα με n κόμβους θα περιείχε κύκλωμα.

β. Το H δεν είναι πλήρες γράφημα αλλιώς θα περιείχε κύκλωμα Hamilton. Επομένως, θα πρέπει να υπάρχουν δύο κόμβοι p, q που δεν είναι γειτονικοί στο H, αλλά η προσθήκη της ακμής $p - q$ θα ολοκλήρωνε ένα κύκλωμα Hamilton. Συνεπώς, υπάρχει μονοπάτι Hamilton που ξεκινά από τον κόμβο p και καταλήγει στον κόμβο q.

γ. Αν υπάρχουν και οι δύο αυτές ακμές στο H, τότε το H έχει κύκλωμα Hamilton που είναι το εξής: $x_i, p, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, q, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_i$.

δ. Οι κόμβοι p και q δεν είναι γειτονικοί (αλλιώς θα υπήρχε κύκλωμα Hamilton), οπότε οι μόνοι κόμβοι που θα μπορούσαν να είναι γειτονικοί με τον p ή τον q (με μία το πολύ ακμή) είναι οι $n - 2$ κόμβοι x_i, $2 \leq i \leq n - 1$. Από το ερώτημα (γ), για κάθε τέτοιο κόμβο x_i, αν ο p είναι γειτονικός με τον x_i τότε ο q δεν είναι γειτονικός με τον x_{i-1}, οπότε το σύνολο των δύο βαθμών δεν μπορεί να υπερβαίνει το $n - 2$.

ε. Το H κατασκευάστηκε από το G προσθέτοντας ακμές, οπότε ο βαθμός κάθε κόμβου στο G είναι μικρότερος ή ίσος με τον βαθμό του στο H. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (δ), έχουμε: $\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(p) + \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(q) < n$ στο γράφημα G.

στ. Οι κόμβοι p και q δεν είναι γειτονικοί, όμως $\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(p) + \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma(q) < n$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη συνθήκη (2), οπότε η υπόθεση ότι το G δεν έχει κύκλωμα Hamilton είναι εσφαλμένη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.3

1. $IN = \{2\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	∞	∞	∞	1	∞
s	2	–	2	2	2	2	2	2

$p = 7, IN = \{2, 7\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	∞	∞	6	1	2
s	2	–	2	2	2	7	2	7

$p = 3, IN = \{2, 7, 3\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	3	∞	6	1	2
s	2	−	2	3	2	7	2	7

$p = 8, IN = \{2, 7, 3, 8\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	3	3	6	1	2
s	2	−	2	3	8	7	2	7

$p = 5, IN = \{2, 7, 3, 8, 5\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	3	3	6	1	2
s	2	−	2	3	8	7	2	7

μονοπάτι: 2, 7, 8, 5 απόσταση $= 3$.

3. $IN = \{1\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	∞	8	1	∞	∞
s	−	1	1	1	1	1	1	1

$p = 6, IN = \{1, 6\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	∞	7	1	6	∞
s	−	1	1	1	6	1	6	1

$p = 2, IN = \{1, 6, 2\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	∞	7	1	4	∞
s	−	1	1	1	6	1	2	1

$p = 7, IN = \{1, 6, 2, 7\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	∞	7	1	4	5
s	−	1	1	1	6	1	2	7

$p = 3, IN = \{1, 6, 2, 7, 3\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	6	7	1	4	5
s	−	1	1	3	6	1	2	7

$p = 8, IN = \{1, 6, 2, 7, 3, 8\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	6	6	1	4	5

s	$-$	1	1	3	8	1	2	7

$p = 5, IN = \{1, 6, 2, 7, 3, 8, 5\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	0	3	5	6	6	1	4	5
s	$-$	1	1	3	8	1	2	7

μονοπάτι: 1, 2, 7, 8, 5   απόσταση = 6.

5. $IN = \{a\}$

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
d	0	1	3	∞	∞	∞
s	$-$	a	a	a	a	a

$p = b, IN = \{a, b\}$

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
d	0	1	2	∞	∞	2
s	$-$	a	b	a	a	b

$p = c, IN = \{a, b, c\}$

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
d	0	1	2	4	6	2
s	$-$	a	b	c	c	b

$p = f, IN = \{a, b, c, f\}$

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
d	0	1	2	4	3	2
s	$-$	a	b	c	f	b

$p = e, IN = \{a, b, c, f, e\}$

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
d	0	1	2	4	3	2
s	$-$	a	b	c	f	b

μονοπάτι: a, b, f, e απόσταση = 3.

7. $IN = \{1\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	∞	∞	3	2	∞
s	$-$	1	1	1	1	1	1

$p = 2, IN = \{1, 2\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	∞	3	2	∞
s	$-$	1	2	1	1	1	1

$p = 6, IN = \{1, 2, 6\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	∞	3	2	5
s	–	1	2	1	1	1	6

$p = 3, IN = \{1, 2, 6, 3\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	4	3	2	5
s	–	1	2	3	1	1	6

$p = 5, IN = \{1, 2, 6, 3, 5\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	4	3	2	5
s	–	1	2	3	1	1	6

$p = 4, IN = \{1, 2, 6, 3, 5, 4\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	4	3	2	5
s	–	1	2	3	1	1	6

$p = 7, IN = \{1, 2, 6, 3, 5, 4, 7\}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	4	3	2	5
s	–	1	2	3	1	1	6

μονοπάτι: 1, 6, 7 απόσταση = 5.

9. α. Αλλάζουμε τη συνθήκη στον βρόχο επανάληψης **όσο** ώστε να συνεχίζει έως ότου όλοι οι κόμβοι περιλαμβάνονται στο IN. Επίσης, αντί να εκτυπώνουμε το συγκεκριμένο συντομότερο μονοπάτι, κάνουμε τα d και s παραμέτρους εξόδου που μεταφέρουν την πληροφορία για τα συντομότερα μονοπάτια και τις αποστάσεις αυτών.

β. Όχι.

11.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	∞	∞	∞	1	∞
s	2	–	2	2	2	2	2	2

(1)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	3	11	4	1	2
s	2	–	2	3	1	1	2	7

(2)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
d	3	0	2	3	3	4	1	2

s	2	–	2	3	8	1	2	7

(3)

Καμία περαιτέρω αλλαγή στα d ή s. Συμφωνεί με την Άσκηση 1 από τον 2 στον 5.

13.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	∞	∞	3	2	∞
s	–	1	1	1	1	1	1

(1)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	∞	3	2	5
s	–	1	2	1	1	1	6

(2)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
d	0	2	3	4	3	2	5
s	–	1	2	3	1	1	6

(3)

Καμία περαιτέρω αλλαγή στα d ή s. Συμφωνεί με την Άσκηση 7 από τον 1 στον 7.

15. Αρχικός πίνακας **A** και μετά $k = x$:

	x	1	2	3	y
x	0	1	∞	4	∞
1	1	0	3	1	5
2	∞	3	0	2	2
3	4	1	2	0	3
y	∞	5	2	3	0

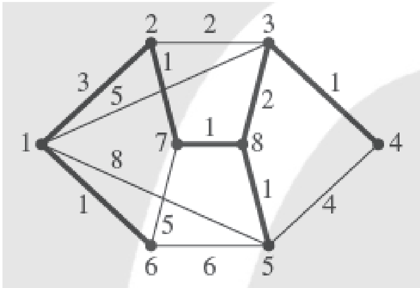
μετά $k = 1$ και $k = 2$:

	x	1	2	3	y
x	0	1	4	2	6
1	1	0	3	1	5
2	4	3	0	2	2
3	2	1	2	0	3
y	6	5	2	3	0

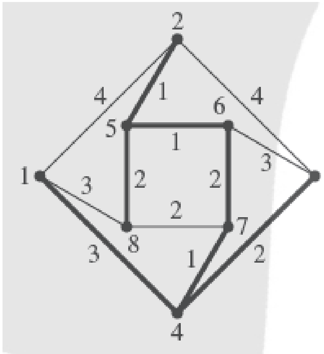
μετά $k = 3$ και $k = y$:

	x	1	2	3	y
x	0	1	4	2	5
1	1	0	3	1	4
2	4	3	0	2	2
3	2	1	2	0	3
y	5	4	2	3	0

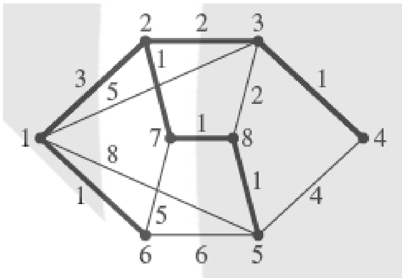
17. $IN = \{1, 6, 2, 7, 8, 5, 3, 4\}$



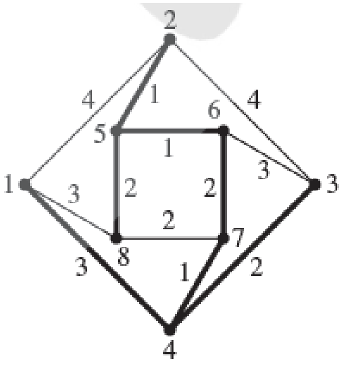
19. $IN = \{1, 4, 7, 3, 6, 5, 2, 8\}$



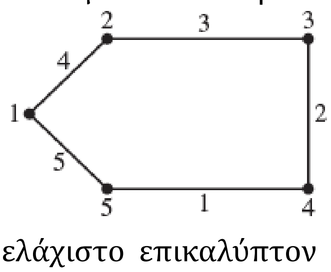
21. Για παράδειγμα,



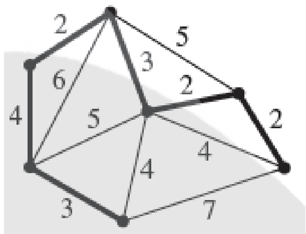
23. Για παράδειγμα,



25. Το συντομότερο μονοπάτι από τον 1 στον 5 είναι το $1 - 5$ με απόσταση 5. Αν ο αλγόριθμος πρόσθετε τον κόμβο που είναι πλησιέστερα στο IN σε κάθε βήμα, τότε θα επέλεγε το μονοπάτι 1 – 2 – 3 – 4 – 5 με απόσταση 10.



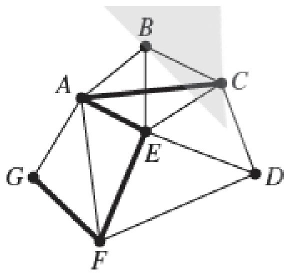
27. Η λύση είναι να βρούμε ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο για το γράφημα, όπως φαίνεται παρακάτω.



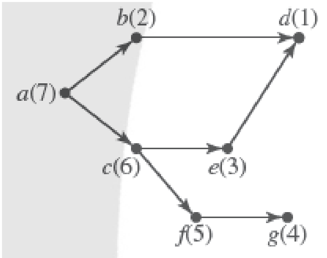
29. Ο αλγόριθμος του Dijkstra είναι $\Theta(n^2)$ στη χειρότερη περίπτωση, η οποία προκύπτει όταν εισάγονται όλοι οι κόμβοι στο IN. Αυτός είναι ο τρόπος για να βρούμε την απόσταση από τον κόμβο εκκίνησης προς οποιονδήποτε άλλον κόμβο. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία με κάθε έναν από τους n κόμβους, στη σειρά, ως κόμβο εκκίνησης θα καταλήγαμε σε έναν αλγόριθμο τάξης μεγέθους $n\Theta(n^2) = \Theta(n^3)$. Ο αλγόριθμος του Floyd είναι ξεκάθαρα $\Theta(n^3)$ εξαιτίας των φωλιασμένων βρόχων επανάληψης **για**. Συνεπώς, οι αλγόριθμοι έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Παρόλο που ο αλγόριθμος του Floyd έχει το πλεονέκτημα του απλούστερου κώδικα, αυτό εξισορροπείται και με το παραπάνω από το γεγονός ότι ο αλγόριθμος του Floyd δεν μας δίνει τα πραγματικά συντομότερα μονοπάτια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.4

1. $a\ b\ c\ e\ f\ d\ h\ g\ j\ i$
3. $d\ a\ b\ c\ e\ f\ h\ g\ j\ i$
5. $e\ b\ a\ c\ f\ d\ h\ g\ j\ i$
7. $a\ b\ c\ f\ j\ g\ d\ e\ h\ k\ i$
9. $f\ c\ a\ b\ d\ e\ h\ k\ i\ g\ j$
11. $a\ b\ c\ d\ e\ g\ f\ h\ j\ i$
13. $d\ a\ f\ b\ c\ e\ h\ g\ i\ j$
15. $e\ b\ c\ f\ g\ a\ d\ h\ j\ i$
17. $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ i\ h\ j\ k$
19. $f\ c\ j\ a\ b\ g\ d\ e\ h\ i\ k$
21. $a\ b\ c\ e\ g\ d\ f\ h$
23. $f\ b$
25. $a\ b\ c\ d\ e\ g\ h\ f$
27. $f\ b$
29.



31. Ξεκινάμε μια αναζήτηση κατά βάθος από τον κόμβο a : $a\ c\ f\ g\ e\ b\ d$

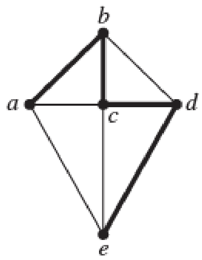


33. Εξαιτίας της αναδρομής, η στοίβα θα ήταν η κατάλληλη δομή δεδομένων.

35. Υποθέτουμε ότι η αναζήτηση κατά βάθος έχει επισκεφτεί τον κόμβο x και έχει προχωρήσει ώστε να επισκεφτεί τον κόμβο y. Ο αλγόριθμος αναζητά κόμβους γειτονικούς του y που δεν έχουν ακόμα δεχτεί επίσκεψη. Αν ένας κόμβος που έχει ήδη δεχτεί επίσκεψη (εκτός από τον «γονέα» του y, τον x) βρίσκεται στη λίστα γειτνίασης του y, τότε το γράφημα περιέχει κύκλο. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 7.13, όταν καλείται ο αναδρομικός αλγόριθμος στον κόμβο g, ο κόμβος d είναι ένας κόμβος που έχει επισκεφτεί προηγουμένως και είναι γειτονικός του g αλλά δεν είναι ο κόμβος γονέας του g (ο οποίος είναι ο f). Η κατάσταση αυτή ανιχνεύει τον κύκλο $d - g - f - d$.

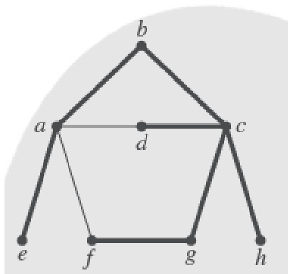
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7.5

1.



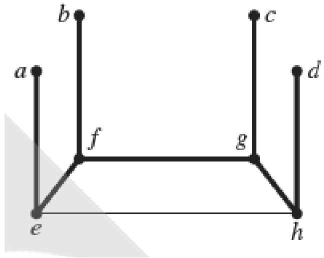
Ανιούσες ακμές: $a - c, a - e, b - d, c - e$.

3.



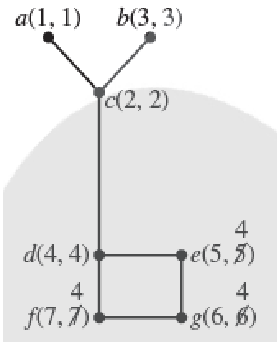
Ανιούσες ακμές: $a - d, a - f$.

5.

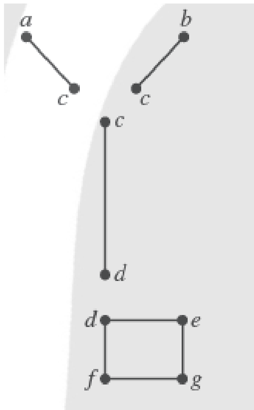


Ανιούσα ακμή: $e - h$.

7.

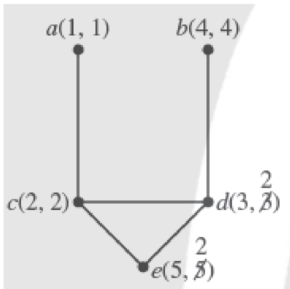


Σημεία άρθρωσης: c, d.

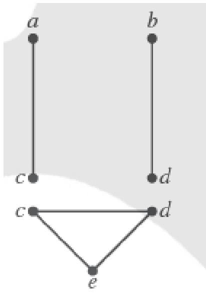


Δισυνεκτικές συνιστώσες

9.

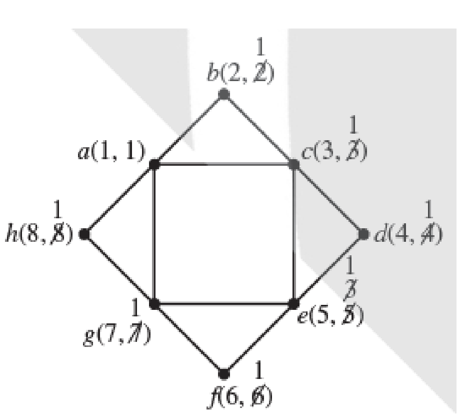


Σημεία άρθρωσης: c, d.

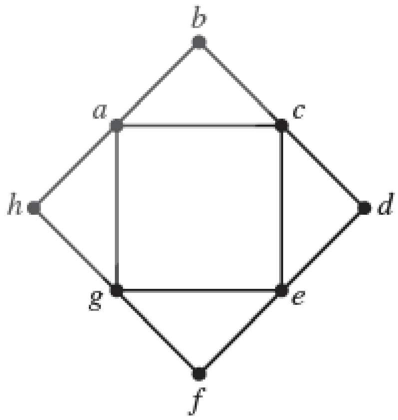


Δισυνεκτικές συνιστώσες

11.



Σημεία άρθρωσης: κανένα



Δισυνεκτικές συνιστώσες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.1

1.

$+$	0	1	a	a'
0	0	1	a	a'
1	1	1	1	1
a	α	1	α	1
a'	α'	1	1	α'

$\cdot$	0	1	a	a'
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α'
a	0	α	α	0
a'	0	α'	0	α'

3. α. $\max(x,y) = \max(y,x)$, $\min(x,y) = \min(y,x)$, $\max(\max(x,y),z) = \max(x,\max(y,z)) = \max(x,y,z)$, $\min(\min(x,y),z) = \min(x,\min(y,z)) = \min(x,y,z)$, $\max(x,\min(y,z)) = \min(\max(x,y), \max(x,z))$, $\min(x,\max(y,z)) = \max(\min(x,y), \min(x,z))$.
   Οι δύο τελευταίες μπορούν να αποδειχθούν παίρνοντας περιπτώσεις: $x < y < z$, $y < x < z$, κ.τ.λ.
   β. Έστω m το στοιχείο 0. Τότε θα πρέπει να έχουμε $\max(x,m) = x$ για κάθε $x \in Z$. Όμως, για $x = m-1$, $\max(m-1,m) = m$.
5. α. 16
   β. $(f_1+f_2)(0,0) = 1$ $\quad (f_1\cdot f_2)(0,0) = 1$ $\quad f_1'(0,0) = 0$
   $(f_1+f_2)(0,1) = 1$ $\quad (f_1\cdot f_2)(0,1) = 0$ $\quad f_1'(0,1) = 1$
   $(f_1+f_2)(1,0) = 1$ $\quad (f_1\cdot f_2)(1,0) = 0$ $\quad f_1'(1,0) = 0$
   $(f_1+f_2)(1,1) = 0$ $\quad (f_1\cdot f_2)(1,1) = 0$ $\quad f_1'(1,1) = 1$
   γ. Οι $+$ και $\cdot$ είναι διμελείς πράξεις στο B και η $'$ είναι μια μονομελής πράξη στο B. Οι max και min είναι αντιμεταθετικές και προσεταιριστικές πράξεις. Οι επιμεριστικοί νόμοι προκύπτουν εξετάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις για τις τιμές των $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ και $f_3(x,y)$ για ένα σταθερό $(x,y) \in S^2$.
   Για κάθε $f \in B$ και $(x,y) \in S^2$, $(f+0)(x,y) = \max\big(f(x,y), 0(x,y)\big) = \max(f(x,y),0) = f(x,y)$ και $(f\cdot 1)(x,y) = \min\big(f(x,y), 1(x,y)\big) = \min(f(x,y),1) = f(x,y)$.
   Επίσης, $(f+f')(x,y) = \max\big(f(x,y), f'(x,y)\big) = 1$ και $(f\cdot f')(x,y) = \min\big(f(x,y), f'(x,y)\big) = 0$ επειδή μία τιμή του ζεύγους $\big(f(x,y), f'(x,y)\big)$ είναι 1 και η άλλη είναι 0.
7. Δείχνουμε ότι το x ενεργεί όπως το συμπλήρωμα του x', δηλαδή, ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες 5α και 5β αναφορικά με το x'.
   $x' + x = x + x'$ $\qquad$ (1α)
   $\quad = 1$ $\qquad$ (5α)
   και
   $x' \cdot x = x \cdot x'$ $\qquad$ (1β)

$= 0$ (5β)

Επομένως, $x = (x')'$ από το θεώρημα της μοναδικότητας του συμπληρώματος.

9. α. $x + (x \cdot y)$

$= x \cdot 1 + x \cdot y$ (4β)

$= x(1 + y)$ (3β)

$= x(y + 1)$ (1α)

$= x \cdot 1$ (καθολικό φράγμα)

$= x$ (4β)

$x \cdot (x + y) = x$ λόγω δυϊκότητας.

β. $x \cdot [y + (x \cdot z)]$

$= x \cdot y + x \cdot (x \cdot z)$ (3β)

$= x \cdot y + (x \cdot x) \cdot z$ (2β)

$= x \cdot y + x \cdot z$ (δυϊκή της ιδιότητας του αυτοδύναμου)

$x + [y \cdot (x + z)] = (x + y) \cdot (x + z)$ λόγω δυϊκότητας

γ. $(x + y) \cdot (x' + y)$

$= (y + x) \cdot (y + x')$ (1α)

$= y + (x \cdot x')$ (3α)

$= y + 0$ (5β)

$= y$ (4α)

$(x \cdot y) + (x' \cdot y) = y$ λόγω δυϊκότητας

δ. $\left(x + (y \cdot z)\right)'$

$= x' \cdot (y \cdot z)'$ (νόμοι De Morgan)

$= x' \cdot (y' + z')$ (νόμοι De Morgan)

$= x' \cdot y' + x' \cdot z'$ (3β)

$\left(x \cdot (y + z)\right)' = (x' + y') \cdot (x' + z')$ λόγω δυϊκότητας

ε. $(x + y) \cdot (x + 1)$

$= (x + y) \cdot x + (x + y) \cdot 1$ (3β)

$= x \cdot (x + y) + (x + y) \cdot 1$ (1β)

$= (x \cdot x) + (x \cdot y) + (x + y) \cdot 1$ (3β)

$= x + (x \cdot y) + (x + y) \cdot 1$ (δυϊκή της ιδιότητας του αυτοδύναμου)

$= x + (x \cdot y) + (x + y)$ (4β)

$= (x \cdot y) + x + (x + y)$ (1α)

$= (x \cdot y) + (x + x) + y$ (2α)

$= (x \cdot y) + x + y$ (ιδιότητα του αυτοδύναμου)

$= x + (x \cdot y) + y$ (1α)

$(x \cdot y) + (x \cdot 0) = x \cdot (x + y) \cdot y$ λόγω δυϊκότητας

11. α. $x + (x' \cdot y + x \cdot y)$

$= x + (y \cdot x' + y \cdot x)'$ (1β)

$= x + \left(y \cdot (x' + x)\right)'$ (3β)

$= x + \left(y \cdot (x + x')\right)'$ (1α)

$= x + (y \cdot 1)'$ (5α)

$= x + y'$ (4β)

β. $\left((x \cdot y) \cdot z\right) + (y \cdot z)$

$= \left(x \cdot (y \cdot z)\right) + (y \cdot z)$ (2β)

$= \big((y \cdot z) \cdot x\big) + (y \cdot z)$ (1β)
$= \big((y \cdot z) \cdot x\big) + (y \cdot z) \cdot 1$ (4β)
$= (y \cdot z) \cdot (x + 1)$ (3β)
$= (y \cdot z) \cdot 1$ (καθολικό φράγμα)
$= y \cdot z$ (4β)

γ. $x \cdot y + y \cdot x'$
$= y \cdot x + y \cdot x'$ (1β)
$= y \cdot (x + x')$ (3β)
$= y \cdot 1$ (5α)
$= y \cdot (x + 1)$ (καθολικό φράγμα)
$= y \cdot x + y \cdot 1$ (3β)
$= y \cdot x + y$ (4β)
$= x \cdot y + y$ (1β)

δ. $(x + y)' \cdot z + x' \cdot z \cdot y$
$= x' \cdot y' \cdot z + x' \cdot z \cdot y$ (νόμοι του De Morgan)
$= x' \cdot z \cdot y' + x' \cdot z \cdot y$ (1β)
$= x' \cdot z \cdot (y' + y)$ (3β)
$= x' \cdot z \cdot (y + y')$ (1α)
$= x' \cdot z \cdot 1$ (5α)
$= x' \cdot z$ (4β)

ε. $(x \cdot y') + (y \cdot z') + (x' \cdot z) = (x \cdot y') \cdot 1 + (y \cdot z') \cdot 1 + (x' \cdot z) \cdot 1$ (4β)
$= (x \cdot y') \cdot (z + z') + (y \cdot z') \cdot (x + x') + (x' \cdot z) \cdot (y + y')$ (5α)
$= x \cdot y' \cdot z + x \cdot y' \cdot z' + y \cdot z' \cdot x + y \cdot z' \cdot x' + x' \cdot z \cdot y + x' \cdot z \cdot y'$ (3β)
$= x \cdot y' \cdot z + x' \cdot z \cdot y' + y \cdot z' \cdot x + x \cdot y' \cdot z' + x' \cdot z \cdot y + y \cdot z' \cdot x'$ (1α)
$= y' \cdot z \cdot x + y' \cdot z \cdot x' + x \cdot z' \cdot y + x \cdot z' \cdot y' + x' \cdot y \cdot z + x' \cdot y \cdot z'$ (1β)
$= (y' \cdot z) \cdot (x + x') + (x \cdot z') \cdot (y + y') + (x' \cdot y) \cdot (z + z')$ (3β)
$= (y' \cdot z) \cdot 1 + (x \cdot z') \cdot 1 + (x' \cdot y) \cdot 1$ (5α)
$= (y' \cdot z) + (x \cdot z') + (x' \cdot y)$ (4β)
$= (x' \cdot y) + (y' \cdot z) + (x \cdot z')$ (1α)

13. Αυτό είναι ένα πρόβλημα «αν και μόνο αν», οπότε υπάρχουν δύο πράγματα που πρέπει να αποδείξουμε.

α. Έστω $x = 0$. Τότε
$x \cdot y' + x' \cdot y = 0 \cdot y' + x' \cdot y$ $(x = 0)$
$= y' \cdot 0 + x' \cdot y$ (1β)
$= 0 + x' \cdot y$ (δυϊκή της ιδιότητας του καθολικού φράγματος)
$= x' \cdot y + 0$ (1α)
$= x' \cdot y$ (4α)
$= 1 \cdot y$ (εξάσκηση 4)
$= y \cdot 1$ (1β)
$= y$ (4β)

β. Έστω $x \cdot y' + x' \cdot y = y$. Τότε
$x \cdot x' + x' \cdot x = x$ (θέτουμε το y στην υπόθεση να πάρει την τιμή x)
$x \cdot x' + x \cdot x' = x$ (1β)
$0 + 0 = x$ (5β)
$0 = x$ (4α)

15. α. $x \oplus y$

$= x \cdot y' + y \cdot x'$ (ορισμός του $\oplus$)
$= y \cdot x' + x \cdot y'$ (1α)
$= y \oplus x$ (ορισμός του $\oplus$)

β. $x \oplus x$

$= x \cdot x' + x \cdot x'$ (ορισμός του $\oplus$)
$= 0 + 0$ (5β)
$= 0$ (4α)

γ. $0 \oplus x$

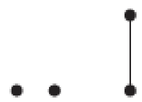
$= 0 \cdot x' + x \cdot 0'$ (ορισμός του $\oplus$)
$= x' \cdot 0 + x \cdot 0'$ (1β)
$= 0 + x \cdot 0'$ (δυϊκή της ιδιότητας του καθολικού φράγματος)
$= 0 + x \cdot 1$ (εξάσκηση 4)
$= 0 + x$ (4β)
$= x + 0$ (1α)
$= x$ (4α)

δ. $1 \oplus x$

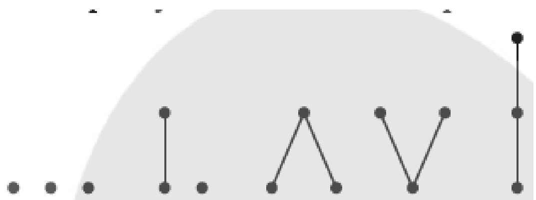
$= 1 \cdot x' + x \cdot 1'$ (ορισμός του $\oplus$)
$= x' \cdot 1 + x \cdot 1'$ (1β)
$= x' + x \cdot 1'$ (4β)
$= x' + x \cdot 0$ (εξάσκηση 4)
$= x' + 0$ (δυϊκή της ιδιότητας του καθολικού φράγματος)
$= x'$ (4α)

17. Υποθέτουμε ότι $x + 0_1 = x$ για κάθε $x \in B$. Τότε $0 + 0_1 = 0$ και $0_1 = 0_1 + 0 = 0 + 0_1 = 0$ και $0_1 = 0$. Τότε $1 = 0'$, οπότε το 1 είναι μοναδικό από το θεώρημα της μοναδικότητας του συμπληρώματος.

19. α.



β.



γ. 16

21. α. (1) αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (2) για $x, y \in S$, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$.

β. Έστω $f(0) = 5, f(1) = 7$. Τότε
$f(0 \cdot 0) = f(1) = 7 = 5 + 5 = f(0) + f(0)$,
$f(0 \cdot 1) = f(0) = 5 = 5 + 7 = f(0) + f(1)$,
$f(1 \cdot 0) = f(0) = 5 = 7 + 5 = f(1) + f(0)$,
$f(1 \cdot 1) = f(1) = 7 = 7 + 7 = f(1) + f(1)$.

23. α. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Η f είναι επί: Δοθέντος ενός $y \in \mathbb{R}^+$, έστω $x = \log y$. Τότε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 2^x = 2^{\log y} = y$. Η f είναι ένα προς ένα: Αν $f(x) = f(w)$ τότε $2^x = 2^w$ και (παίρνοντας τον λογάριθμο και των δύο μελών, έχουμε) $x = w$.

β. Για $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$.

γ. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^+$ και για $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$.

δ. $f^{-1}(y) = \log y$.

ε. Η f^{-1} είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το $\mathbb{R}^+$ στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$, έχουμε $f^{-1}(x \cdot y) = \log(x \cdot y) = \log x + \log y = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

25. $f_1 \to \{1,3\}$, $f_2 \to \{1,2\}$, $f_3 \to \{1,2,3\}$, $f_5 \to \{1,2,4\}$, $f_6 \to \{1,3,4\}$, $f_7 \to \{2,3,4\}$, $f_8 \to \{2,3\}$, $f_9 \to \{2,4\}$, $f_{10} \to \{1,4\}$, $f_{11} \to \{3,4\}$.

27. α. Για κάθε $y \in b$, $y = f(x)$ για κάποιο $x \in B$. Τότε $y \,\&\, f(0) = f(x) \,\&\, f(0) = f(x+0) = f(x) = y$ και $f(0) = \varphi$ αφού το μηδενικό στοιχείο σε οποιαδήποτε άλγεβρα Boole είναι μοναδικό.

β. $f(1) = f(0') = [f(0)]'' = \varphi'' = \mathcal{X}$.

29. α. i. Αν $x \preccurlyeq y$, τότε $x \preccurlyeq y$ και $x \preccurlyeq x$, οπότε το x είναι ένα κάτω φράγμα των x και y. Αν $w^* \preccurlyeq x$ και $w^* \preccurlyeq y$, τότε $w^* \preccurlyeq x$, οπότε το x είναι ένα μέγιστο κάτω φράγμα και $x = x \cdot y$. Αν $x = x \cdot y$, τότε το x είναι ένα μέγιστο κάτω φράγμα των x και y, οπότε $x \preccurlyeq y$.

ii. Ομοίως με το i.

β. i. Έστω $x + y = z$. Τότε το z είναι ένα ελάχιστο άνω φράγμα των x και y, το οποίο είναι ένα ελάχιστο άνω φράγμα των y και x, οπότε $z = y + x$.

ii. Ομοίως με το i.

iii. Έστω $(x+y)+z = p$ και $x+(y+z) = q$. Τότε $y \preccurlyeq x+y \preccurlyeq p$ και $z \preccurlyeq p$, οπότε το p είναι ένα άνω φράγμα των y και z. Εφόσον το $y+z$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των y και z, έχουμε $y+z \preccurlyeq p$. Επίσης $x \preccurlyeq x+y \preccurlyeq p$. Επομένως, το p είναι ένα άνω φράγμα των x και $y+z$, και $q \preccurlyeq p$ αφού το q είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των x και $y+z$. Ομοίως, $p \preccurlyeq q$, οπότε $p = q$.

iv. ομοίως με το iii.

γ. $x + 0 = x \leftrightarrow 0 \preccurlyeq x$, το οποίο είναι αληθές αφού το 0 είναι ένα ελάχιστο στοιχείο.

$x \cdot 1 = x \leftrightarrow x \preccurlyeq 1$, το οποίο είναι αληθές αφού το 1 είναι ένα μέγιστο στοιχείο.

δ. Εικόνα (α) Όχι, δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο.

Εικόνα (β) Ναι.

Εικόνα (γ) Ναι.

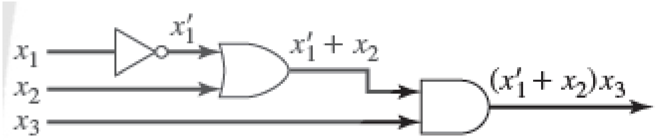
Εικόνα (δ) Όχι, δεν είναι επιμεριστικό: $2 + (3 \cdot 4) = 2 + 1 = 2$ και $(2+3) \cdot (2+4) = 5 \cdot 5 = 5$. Επίσης, αμφότερα τα 3 και 4 είναι συμπληρώματα του 2, οπότε το συμπλήρωμα δεν είναι μοναδικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.2

1. α

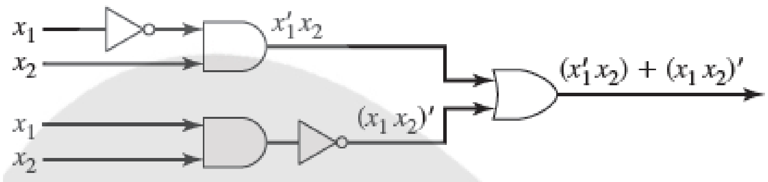
$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{(x_1' + x_2)x_3}$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0

0	0	1	1
0	0	0	0



3.

x_1	x_2	$x_1'x_2 + (x_1x_2)'$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1



5. $x_1x_2 + x_2{}'$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

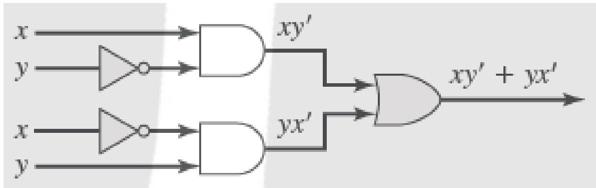
7. $(x_1x_2)'(x_2 + x_3')$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

9. α.

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

β.



γ. Η συνάρτηση αληθείας για το κύκλωμα είναι η ίδια με αυτήν του ερωτήματος (α). Το κύκλωμα παριστάνει το «x OR y» και «NOT αμφότερα x AND y».

11. $x_1'x_2'$

13. $x_1x_2x_3 + x_1'x_2x_3$

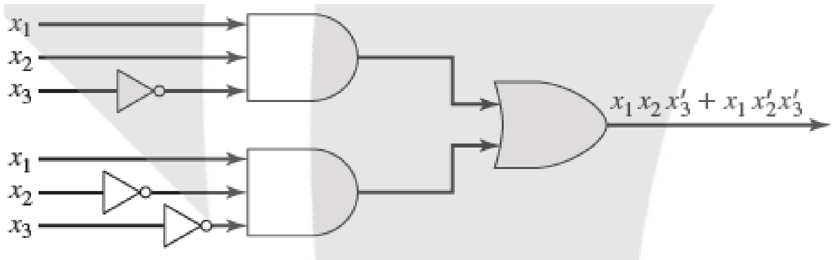
15. $x_1x_2'x_3 + x_1x_2'x_3' + x_1'x_2x_3'$

17. $x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3'x_4 + x_1x_2'x_3x_4 + x_1x_2'x_3'x_4 + x_1'x_2'x_3x_4 + x_1'x_2'x_3x_4'$

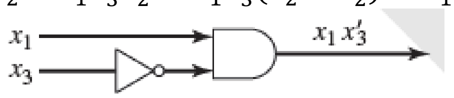
19. $x_1x_2'x_3x_4' + x_1'x_2x_3x_4 + x_1'x_2x_3'x_4 + x_1'x_2'x_3x_4 + x_1'x_2'x_3x_4' + x_1'x_2'x_3'x_4$

21. α. $x_1x_2x_3' + x_1x_2'x_3'$

β.



γ. $x_1x_2x_3' + x_1x_2'x_3' = x_1x_3'x_2 + x_1x_3'x_2' = x_1x_3'(x_2 + x_2') = x_1x_3' \cdot 1 = x_1x_3'$



23. α.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

β. $x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_3 + x_1'x_2x_3 + x_1'x_2x_3 + x_1'x_2x_3'$

γ. $x_1x_3 + x_1'x_2 = (x_1x_3 + x_1')(x_1x_3 + x_2) = (x_1' + x_1x_3)(x_2 + x_1x_3) =$
$(x_1' + x_1)(x_1' + x_3)(x_2 + x_1)(x_2 + x_3) = (x_1 + x_1')(x_1' + x_3)(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) =$
$(x_1' + x_3)(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = (x_1 + x_2)(x_1' + x_3)(x_2 + x_3)$

25. α. $(x_1' + x_2')(x_1' + x_2)(x_1 + x_2')$

β. $(x_1' + x_2)(x_1 + x_2)$

γ. $(x_1' + x_2' + x_3)(x_1' + x_2 + x_3')(x_1' + x_2 + x_3)(x_1 + x_2' + x_3)(x_1 + x_2 + x_3')(x_1 + x_2 + x_3)$

δ. $(x_1' + x_2' + x_3')(x_1' + x_2 + x_3)(x_1 + x_2' + x_3)(x_1 + x_2 + x_3')$

ε. $(x_1' + x_2' + x_3)(x_1' + x_2' + x_3)(x_1 + x_2' + x_3')(x_1 + x_2 + x_3')(x_1 + x_2 + x_3)$

27. α.

$$\begin{array}{r} 1100 \\ 0100 \\ \hline (1)0000 \end{array}$$

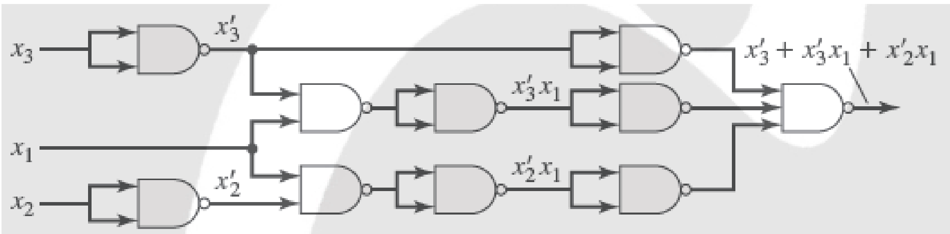
β.

$$\begin{array}{r} 1001 \\ 0111 \\ \hline (1)0000 \end{array}$$

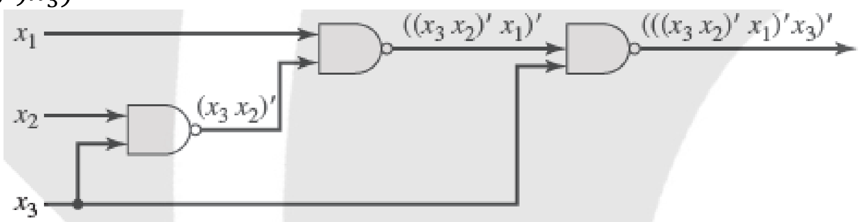
γ.

$$\begin{array}{r} 001 \\ 111 \\ \hline (1)000 \end{array}$$

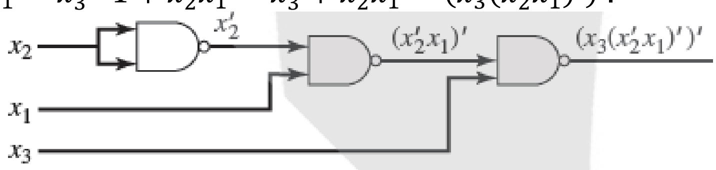
29. α.



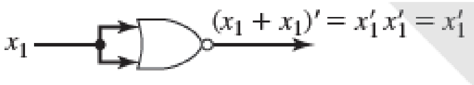
β. $x_3'x_1 + x_2'x_1 + x_3' = x_1x_3' + x_1x_2' + x_3' = x_1(x_3' + x_2') + x_3' = (x_3x_2)'x_1 + x_3' = (((x_3x_2)'x_1)')x_3)'$



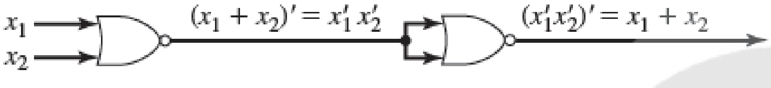
ή εναλλακτικά, $x_3'x_1 + x_2'x_1 + x_3' = x_3'x_1 + x_3' + x_2'x_1 = x_3'x_1 + x_3' \cdot 1 + x_2'x_1 = x_3'(x_1 + 1) + x_2'x_1 = x_3' \cdot 1 + x_2'x_1 = x_3' + x_2'x_1 = (x_3(x_2'x_1)')'$.



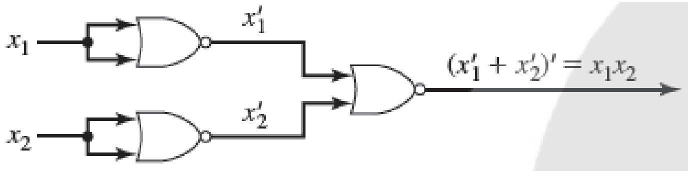
31. α.



β.



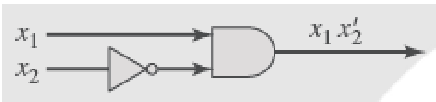
γ.



33.

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{f(x_1, x_2)}$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

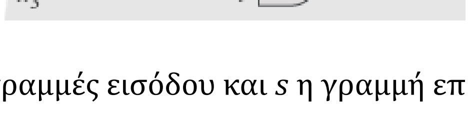
$$x_1 x_2'$$



35. $x_1 = \mathrm{N},\ x_2 = \mathrm{P},\ x_3 =$ ζώνη ασφαλείας

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3)}$
1	1	1	-
1	1	0	-
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$$(x_1 + x_2)x_3$$

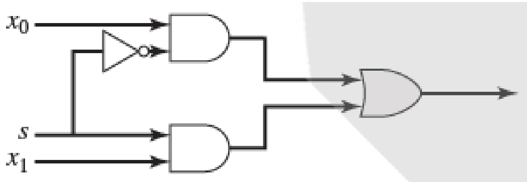


37. α. Έστω x_0 και x_1 οι δύο γραμμές εισόδου και s η γραμμή επιλογής. Η συνάρτηση αληθείας είναι:

$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{f(x_0, x_1, s)}$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

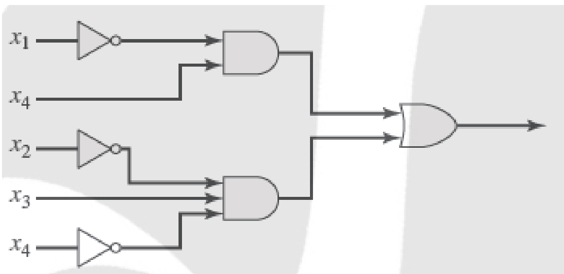
β.



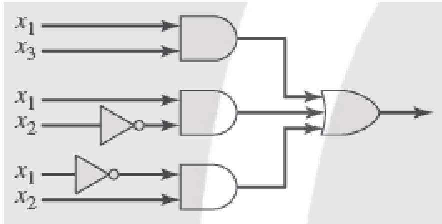
39. x_1 = πίεση (1 όταν πίεση > 50 psi, αλλιώς 0)
x_2 = αλατότητα (1 όταν αλατότητα > 45 g/L, αλλιώς 0)
x_3 = θερμοκρασία (1 όταν θερμοκρασία $> 53°C$, αλλιώς 0)
x_4 = οξύτητα (1 όταν οξύτητα < 7.0 pH, αλλιώς 0)
Η έξοδος για κάθε βαλβίδα θα πρέπει να είναι 1 όταν η βαλβίδα πρόκειται να ανοίξει, αλλιώς 0.) Οι κανονικές μορφές αθροίσματος των γινομένων είναι
$A = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4' + x_1x_2x_3'x_4 + x_1x_2x_3'x_4'$
$B = x_1x_2'x_3x_4 + x_1'x_2x_3x_4 + x_1'x_2'x_3x_4$
Χρησιμοποιώντας τις μορφές αυτές, το κύκλωμα για την A απαιτεί 2 αντιστροφείς (έναν για την x_3 και έναν για την x_4, υποθέτοντας ότι χωρίζουμε την έξοδο από έναν αντιστροφέα σε περισσότερες από μία πύλες), 4 πύλες AND και 1 πύλη OR. Το κύκλωμα για την B απαιτεί 2 αντιστροφείς, 3 πύλες AND και 1 πύλη OR. Είναι δυνατόν να γράψουμε απλούστερες ισοδύναμες εκφράσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8.3

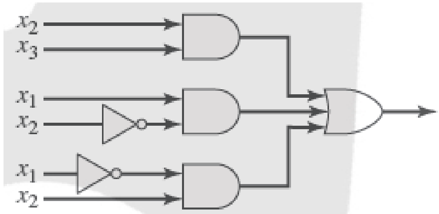
1. $x_1'x_3 + x_1x_3' + x_1'x_2$ ή $x_1'x_3 + x_1x_3' + x_2x_3'$
3. $x_3 + x_2$
5. $x_1x_3'x_4' + x_1'x_3x_4' + x_2'x_4' + x_1x_2'$
7. $x_1x_2'x_4 + x_1'x_3x_4' + x_2'x_3x_4'$ ή $x_1x_2'x_4 + x_1'x_3x_4' + x_1x_2'x_3$
9. $x_1x_2 + x_2x_3$
11. $x_1x_4 + x_1'x_2'x_3$
13. α. $x_1'x_4 + x_2'x_3x_4'$
β.



15. $x_2x_3'x_4 + x_2'x_3x_4' + x_1'x_4$
17. $x_1x_3 + x_1x_2' + x_1'x_2$ ή $x_2x_3 + x_1x_2' + x_1'x_2$



ή



19. $x_2x_4' + x_1'x_2'x_4$. Εδώ η συνθήκη αδιαφορίας στο $x_1x_2x_3'x_4'$ αντιμετωπίστηκε ως 1, όπως αντιμετωπίστηκε και η συνθήκη αδιαφορίας στο $x_1'x_2'x_3'x_4$. Η συνθήκη αδιαφορίας στο $x_1x_2'x_3x_4'$ έχει αγνοηθεί.

21. $x_3 + x_2$

23. $x_1x_3x_4' + x_1x_2'x_3' + x_1'x_2'x_3 + x_1'x_3'x_4'$

25. $x_1x_2'x_3x_4' + x_1'x_3x_4 + x_1'x_3'x_4' + x_1'x_2'x_4$

ή

$x_1x_2'x_3x_4' + x_1'x_3x_4 + x_1'x_3'x_4' + x_1'x_2'x_3'$

27. $x_1x_2 + x_2x_4' + x_1x_3'x_4 + x_1'x_2'x_3'$

ή

$x_1x_2 + x_2x_4' + x_2'x_3'x_4 + x_1'x_3'x_4'$

ή

$x_1x_2 + x_2x_4' + x_2'x_3'x_4 + x_1'x_2'x_3'$

29. $x_1x_3 + x_1'x_2x_3' + x_2'x_3'x_4'$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.1

1. α. Δεν είναι αντιμεταθετική ούτε προσεταιριστική.
β. Ο ολοκληρωμένος πίνακας είναι

$\cdot$	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	r	s	p
r	r	s	p	q
s	s	p	q	r

Η πράξη είναι αντιμεταθετική.

3. α. Είναι προσεταιριστική αλλά όχι αντιμεταθετική.
β. Είναι αντιμεταθετική αλλά όχι προσεταιριστική.
γ. Δεν είναι ούτε προσεταιριστική ούτε αντιμεταθετική.
δ. Είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική.
ε. Είναι αντιμεταθετική αλλά όχι προσεταιριστική.

5. α. Ημιομάδα.
β. Τίποτα από αυτά.
γ. Τίποτα από αυτά.
δ. Μονοειδές. $i = 1 + 0\sqrt{2}$.
ε. Ομάδα. $i = 1 + 0\sqrt{2}$.
στ. Ομάδα. $i = 1$.

7. α. Ομάδα. $i =$ το μηδενικό πολυώνυμο.
β. Τίποτα από αυτά.
γ. Ομάδα. $i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
δ. Ομάδα. $i = 1$.
ε. Ομάδα. $i = 0$.
στ. Μονοειδές. $i =$ η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε x στο 0.

9.

$\circ$	R_1	R_2	R_3	F_1	F_2	F_3
R_1	R_2	R_3	R_1	F_3	F_1	F_2
R_2	R_3	R_1	R_2	F_2	F_3	F_1
R_3	R_1	R_2	R_3	F_1	F_2	F_3
F_1	F_2	F_3	F_1	R_3	R_1	R_2
F_2	F_3	F_1	F_2	R_2	R_3	R_1
F_3	F_1	F_2	F_3	R_1	R_2	R_3

Το ταυτοτικό στοιχείο είναι η R_3. Το αντίστροφο στοιχείο της F_1 είναι η F_1. Το αντίστροφο στοιχείο της R_2 είναι η R_1.

11. α. Όχι. Δεν έχουν την ίδια πράξη.
β. Όχι. Το μηδενικό πολυώνυμο (ταυτοτικό στοιχείο) δεν ανήκει στο P. Επίσης, δεν ισχύει η κλειστότητα.
γ. Όχι. Δεν ισχύει ότι κάθε στοιχείο του $\mathbb{Z}^*$ έχει αντίστροφο στοιχείο στο $\mathbb{Z}^*$.
δ. Ναι.

13. $[\{0\}, +_{12}]$, $[\mathbb{Z}_{12}, +_{12}]$, $[\{0,2,4,6,8,10\}, +_{12}]$, $[\{0,4,8\}, +_{12}]$, $[\{0,3,6,9\}, +_{12}]$, $[\{0,6\}, +_{12}]$.

15. $a_1 = i,\ a_2 = (1,2)\circ(3,4),\ a_3 = (1,3)\circ(2,4),\ a_4 = (1,4)\circ(2,3),\ a_5 = (1,3)\circ(1,2),$ $a_6 = (1,2)\circ(1,3),\ a_7 = (1,3)\circ(1,4),\ a_8 = (1,4)\circ(1,2),\ a_9 = (1,4)\circ(1,3),\ a_{10} =$ $(1,2)\circ(1,4),\ a_{11} = (2,4)\circ(2,3),\ a_{12} = (2,3)\circ(2,4).$

17. α. Όχι. β. Όχι. γ. Ναι, αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

19. α. Ναι. $f\colon \mathbb{Z} \to 12\mathbb{Z},\ f(x) = 12x.$

β. Όχι. Το $\mathbb{Z}_5$ είναι πεπερασμένο, ενώ το $5\mathbb{Z}$ είναι άπειρο.

γ. Ναι. $f\colon 5\mathbb{Z} \to 12\mathbb{Z},\ f(x) = \frac{12}{5}x.$

δ. Όχι. Αμφότερα τα σύνολα έχουν 6 στοιχεία, όμως η $[S_3,\ \circ]$ δεν είναι αντιμεταθετική ενώ η $[\mathbb{Z}_6, +_6]$ είναι αντιμεταθετική.

21. α. Κλειστότητα:

$$\begin{bmatrix}1 & z\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & w\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & w+z\\0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2^0(\mathbb{Z}).$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2^0(\mathbb{Z}).$$

Ο αντίστροφος του $\begin{bmatrix}1 & z\\0 & 1\end{bmatrix}$ είναι ο $\begin{bmatrix}1 & -z\\0 & 1\end{bmatrix}$, ο οποίος ανήκει στο $\mathrm{M}_2^0(\mathbb{Z})$.

β. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση και

$$f\left(\begin{bmatrix}1 & z\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & w\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1 & w+z\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = w+z = z+w = f\left(\begin{bmatrix}1 & z\\0 & 1\end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix}1 & w\\0 & 1\end{bmatrix}\right).$$

γ.

$$f\left(\begin{bmatrix}1 & 7\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 7 \ \text{ και }\ f\left(\begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = -3, \qquad 7 + (-3) = 4, \qquad f^{-1}(4) = \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}$$

δ.

$$f^{-1}(2) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} \ \text{ και }\ f^{-1}(3) = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix} \ \text{ και }\ f\left(\begin{bmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = 5.$$

23. α. $i\cdot i = i,$ οπότε $i = i^{-1}.$

β. $x^{-1}\cdot x = x\cdot x^{-1} = i,$ οπότε $x = (x^{-1})^{-1}.$

25. α. $x\,\rho\,x$ αφού $i\cdot x\cdot i^{-1} = x\cdot i^{-1} = x\cdot i = x.$ Αν $x\,\rho\,y$, τότε για κάποιο $g\in G$, $g\cdot x\cdot g^{-1} = y$ ή $g\cdot x = y\cdot g$ ή $x = g^{-1}\cdot y\cdot g = (g^{-1})\cdot y\cdot (g^{-1})^{-1}$, οπότε $y\,\rho\,x$. Αν $x\,\rho\,y$ και $y\,\rho\,z$, τότε για κάποια $g_1, g_2\in G$, $g_1\cdot x\cdot g_1^{-1} = y$ και $g_2\cdot y\cdot g_2^{-1} = z$, οπότε $g_2\cdot g_1\cdot x\cdot g_1^{-1}\cdot g_2^{-1} = z$ ή $(g_2\cdot g_1)\cdot x\cdot (g_2\cdot g_1)^{-1} = z$ και $x\,\rho\,z$.

β. Υποθέτουμε ότι η G είναι αντιμεταθετική και $y\in[x]$. Τότε για κάποιο $g\in G, y = g\cdot x\cdot g^{-1} = x\cdot g\cdot g^{-1} = x\cdot i = x$. Άρα, $[x] = \{x\}$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $[x] = \{x\}$ για κάθε $x\in G$. Έστω $x, y\in G$. Συμβολίζουμε το στοιχείο $y\cdot x\cdot y^{-1}$ με z. Τότε $x\,\rho\,z$, οπότε $z = x$ και $y\cdot x\cdot y^{-1} = x$ ή $y\cdot x = x\cdot y$.

27. α. $i_L = i_L\cdot i_R$, οπότε $i_L = i_R$ και το στοιχείο αυτό είναι το ταυτοτικό στοιχείο της $[S,\ \cdot]$.

β. Για παράδειγμα,

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	a	b

γ. Για παράδειγμα,

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	b	b

δ. Για παράδειγμα, $[\mathbb{R}^+, +]$.

29. Έστω $x \in S$ με αριστερό αντίστροφο στοιχείο y. Τότε $y \in S$, οπότε έστω z το αριστερό αντίστροφο στοιχείο του y. Τότε $x \cdot y = i_L \cdot (x \cdot y) = (z \cdot y) \cdot (x \cdot y) = z \cdot (y \cdot x) \cdot y = z \cdot i_L \cdot y = z \cdot y = i_L$, οπότε το y είναι επίσης δεξί αντίστροφο στοιχείο του x. Επίσης, $x \cdot i_L = x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x = i_L \cdot x = x$, οπότε το i_L είναι επίσης δεξί ταυτοτικό στοιχείο στο S και συνεπώς είναι ταυτοτικό στοιχείο.

31. Για κάποιο συγκεκριμένο $a \in S$, έστω x_1 η λύση της εξίσωσης $x \cdot a = a$. Έστω b ένα οποιοδήποτε στοιχείο του S. Τότε $a \cdot x = b$ για κάποιο $x \in S$ και $x_1 \cdot b = x_1 \cdot (a \cdot x) = (x_1 \cdot a) \cdot x = a \cdot x = b$. Επομένως, το x_1 είναι αριστερό ταυτοτικό στοιχείο στο S. Επίσης, για κάθε $b \in S$, υπάρχει x τέτοιο ώστε $x \cdot b = x_1$. Άρα, κάθε στοιχείο του S έχει αριστερό αντίστροφο. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την Άσκηση 29.

33. Αν η G είναι αντιμεταθετική, τότε $(x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot x) \cdot x = x \cdot (x \cdot y) \cdot y = (x \cdot x) \cdot (y \cdot y) = x^2 \cdot y^2$. Αντίστροφα, έστω $x, y \in G$. Τότε, $x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$ και από το νόμο της αριστερής και της δεξιάς διαγραφής, $y \cdot x = x \cdot y$, οπότε η G είναι αντιμεταθετική.

35. Κλειστότητα: έστω $x, y \in B_k$. Τότε $(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$ (λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας) $= i \cdot i = i$, οπότε $x \cdot y \in B_k$.
Ταυτοτικό στοιχείο: $i^k = i$, οπότε $i \in B_k$.
Αντίστροφα στοιχεία: για $x \in B_k$, $(x^{-1})^k = (x^k)^{-1} = i^{-1} = i$, οπότε $x^{-1} \in B_k$.

37. α. $S \cap T \subseteq G$. Κλειστότητα: για $x, y \in S \cap T$, $x \cdot y \in S$ λόγω της κλειστότητας στο S, $x \cdot y \in T$ λόγω της κλειστότητας στο T, οπότε $x \cdot y \in S \cap T$.
Ταυτοτικό στοιχείο: $i \in S$ και $i \in T$, οπότε $i \in S \cap T$.
Αντίστροφα στοιχεία: για $x \in S \cap T$, $x^{-1} \in S$ και $x^{-1} \in T$, οπότε $x^{-1} \in S \cap T$.

β. Όχι. Για παράδειγμα, οι $[\{0, 4, 8\}, +_{12}]$ και $[\{0, 6\}, +_{12}]$ είναι υποομάδες της $[\mathbb{Z}_{12}, +_{12}]$ αλλά η $[\{0, 4, 6, 8\}, +_{12}]$ δεν είναι υποομάδα της $[\mathbb{Z}_{12}, +_{12}]$ (δεν ισχύει η κλειστότητα).

39. α. Κλειστότητα: έστω $f, g \in H_a$. Τότε $(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(a) = a$, οπότε $f \circ g \in H_a$.
Ταυτοτικό στοιχείο: η ταυτοτική απεικόνιση στο A απεικονίζει το a στο a.
Αντίστροφα στοιχεία: έστω $f \in H_a$. Τότε $f(a) = a$, οπότε $f^{-1}(a) = a$ και $f^{-1} \in H_a$.
β. $(n-1)!$

41. α. Έστω $x = a^{z_1}, y = a^{z_2} \in A$. Τότε $x \cdot y^{-1} = a^{z_1} \cdot (a^{z_2})^{-1} = a^{z_1} \cdot (a^{-1})^{z_2} = a^{z_1 - z_2} \in A$. Από την Άσκηση 40, η A είναι υποομάδα.
β. $2^0 = 0$, $2^1 = 2$, $2^2 = 2 +_7 2 = 4$, $2^3 = 6$, $2^4 = 1$, $2^5 = 3$, $2^6 = 5$.
γ. $5^0 = 0$, $5^1 = 5$, $5^2 = 5 +_7 5 = 3$, $5^3 = 1$, $5^4 = 6$, $5^5 = 4$, $5^6 = 2$.
δ. $3^0 = 0$, $3^1 = 3$, $3^2 = 3 +_4 3 = 2$, $3^3 = 1$.

43. α. Η $[Aut(S), \circ]$ είναι κλειστή αφού η σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός (Εξάσκηση 31). Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει πάντοτε για τη σύνθεση συναρτήσεων. Η ταυτοτική συνάρτηση i_S είναι αυτομορφισμός στο S. Τέλος, αν η f είναι αυτομορφισμός στο S, το ίδιο ισχύει για την f^{-1}.
β.

$$
\begin{array}{ll}
 & 0 \to 0 \\
 & 1 \to 1 \\
i: & 2 \to 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & 0 \to 0 \\
 & 1 \to 3 \\
f: & 2 \to 2
\end{array}
$$

$3 \to 3$ $\qquad$ $3 \to 1$

$\circ$	i	f
i	i	f
f	f	i

45. Έστω i_G και i_H τα ταυτοτικά στοιχεία των G και H, αντίστοιχα. Έστω f ένας ισομορφισμός, $f: G \to H$. Τότε $f(i_G) = i_H$ και εφόσον η f είναι ένα προς ένα, το i_G είναι το μοναδικό στοιχείο που απεικονίζεται στο i_H. Έστω τώρα ότι η f είναι ομομορφισμός από την G επί της H, οπότε $f(i_G) = i_H$. Υποθέτουμε ότι το i_G είναι το μοναδικό στοιχείο που απεικονίζεται στο i_H και έστω $f(g_1) = f(g_2)$ για $g_1, g_2 \in G$. Τότε $f(g_1 \cdot g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot \left(f(g_2)\right)^{-1} = f(g_1) \cdot \left(f(g_1)\right)^{-1} = i_H$. Επομένως, $g_1 \cdot g_2^{-1} = i_G$ και $g_1 = i_G \cdot g_2 = g_2$. Άρα, η f είναι ένα προς ένα. Η f είναι ήδη ένας επί ομομορφισμός, οπότε είναι ισομορφισμός.

47. α. Η πράξη $+$ είναι μια διμελής πράξη στο E (καλώς ορισμένη και κλειστή).
Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει αφού $([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [(x + y) + z] = [x + (y + z)] = [x] + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$.
$[0]$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο αφού $[x] + [0] = [x + 0] = [x]$ και $[0] + [x] = [0 + x] = [x]$.
Κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο στοιχείο: $[x] + [-x] = [x + (-x)] = [0] = [-x] + [x]$.
Η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει αφού $[x] + [y] = [x + y] = [y + x] = [y] + [x]$.

β. Η συνάρτηση $f: \mathbb{Z}_5 \to E_5$ που ορίζεται ως $f(0) = [0]$, $f(1) = [1]$, $f(2) = [2]$, $f(3) = [3]$, $f(4) = [4]$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Επίσης είναι ομομορφισμός. Για $x, y \in \mathbb{Z}_5$, $f(x + y) = [x + y] = [x] + [y] = f(x) + f(y)$.

γ. Το αντίστροφο στοιχείο της $[10]$ είναι η $[-10] = [4]$. Η προεικόνα της $[21]$ είναι το 7.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.2

1. Το $f(G)$ είναι κλειστό: Έστω $f(x)$ και $f(y)$ στοιχεία του $f(G)$. Τότε, εφόσον η f είναι ομομορφισμός, $f(x) + f(y) = f(x \cdot y)$. Εφόσον $x, y \in G$, το $x \cdot y$ ανήκει στο G και το $f(x \cdot y)$ είναι στοιχείο του $f(G)$.
Το i_H ανήκει στο $f(G)$: Έστω $f(x)$ ένα στοιχείο στο $f(G)$. Τότε $f(x) + f(i_G) = f(x \cdot i_G) = f(x)$ και $f(i_G) + f(x) = f(i_G \cdot x) = f(x)$, οπότε το $f(i_G)$ είναι ταυτοτικό στοιχείο για το υποσύνολο $f(G)$ και συνεπώς $f(i_G) = i_H$.
Τα στοιχεία του $f(G)$ έχουν αντίστροφα στοιχεία στο $f(G)$: Έστω $f(x)$ ένα στοιχείο στο $f(G)$. Τότε το x ανήκει στο G και το x^{-1} υπάρχει στο G. Τότε, $f(x^{-1}) + f(x) = f(x^{-1} \cdot x) = f(i_G) = i_H$. Ομοίως, $f(x) + f(x^{-1}) = i_H$, οπότε $f(x^{-1}) = -f(x)$ και το $f(x)$ έχει αντίστροφο στοιχείο στο $f(G)$.
3. $K = 4\mathbb{Z}$.
5. α. $f\big((x, y) + (r, s)\big) = f(x + r, y + s) = (x + r) + (y + s) = (x + y) + (r + s) = f(x, y) + f(r, s)$.
β. $K = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
7. $7 +_{12} S = \{7, 11, 13\}$.

9. α. Ο πίνακας $\mathbf{H}$ δεν έχει κάποια γραμμή που να αποτελείται ολόκληρη από 0 ούτε δύο ίδιες γραμμές, οπότε η ελάχιστη απόσταση είναι 3 και ο κώδικας είναι κώδικας διόρθωσης μεμονωμένου σφάλματος.
   β. Ο πίνακας $\mathbf{H}$ μπορεί να κωδικοποιήσει ολόκληρη την $\mathbb{Z}_2^3$.
   $000 \to 000000,\ 001 \to 001101,\ 010 \to 010011,\ 011 \to 011110,\ 100 \to 100111,$
   $101 \to 101010,\ 110 \to 110100,\ \ 111 \to 111001.$
11. Για παράδειγμα,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Έστω $X = (x_1, \dots, x_n)$ και $Y = (y_1, \dots, y_n)$ στοιχεία του $\mathbb{Z}_2^n$. Η i −οστή συνιστώσα του $(X +_2 Y) \cdot \mathbf{H}$ δίνεται από την έκφραση $(x_1 +_2 y_1) \cdot \mathbf{H}_{1i} +_2 (x_2 +_2 y_2) \cdot \mathbf{H}_{2i} +_2 \cdots +_2 (x_n +_2 y_n) \cdot \mathbf{H}_{ni}$. Εφόσον ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα και η πρόσθεση modulo 2 είναι αντιμεταθετική, η παραπάνω έκφραση ισούται με $(x_1\mathbf{H}_{1i} +_2 x_2\mathbf{H}_{2i} +_2 \cdots +_2 x_n\mathbf{H}_{ni}) +_2 (y_1\mathbf{H}_{1i} +_2 y_2\mathbf{H}_{2i} +_2 \cdots +_2 y_n\mathbf{H}_{ni})$, η οποία είναι η i −οστή συνιστώσα του $X \cdot \mathbf{H} +_2 Y \cdot \mathbf{H}$.
15.

Οδηγοί συμπλόκου	Σύνδρομα
0000000	000
0000001	001
0000010	010
0010000	011
0000100	100
0100000	101
1000000	110
0001000	111

17. Η αποκωδικοποιημένη λέξη είναι 011000010101001.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.3

1. α. 0001111110   β. *aaacaaaa*   γ. 00100110
3.

Παρούσα κατάσταση	Επόμενη κατάσταση Παρούσα είσοδος		Έξοδος
	0	**1**	
s_0	s_1	s_1	0
s_1	s_2	s_1	1
s_2	s_2	s_0	0

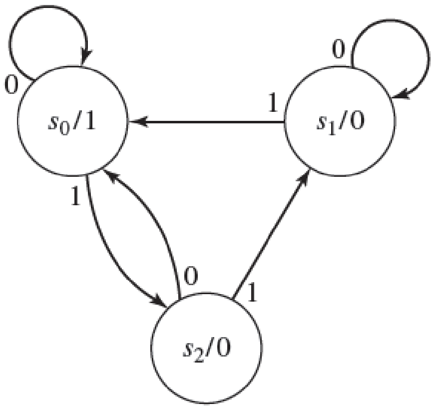
Η έξοδος είναι 010010.

5.

Παρούσα κατάσταση	Επόμενη κατάσταση		Έξοδος
	Παρούσα είσοδος		
	0	**1**	
s_0	s_1	s_2	a
s_1	s_2	s_3	b
s_2	s_2	s_1	c
s_3	s_2	s_3	b

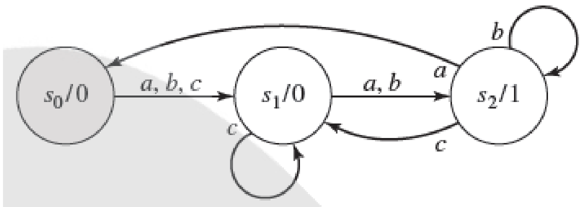
Η έξοδος είναι $abbcbb$.

7.



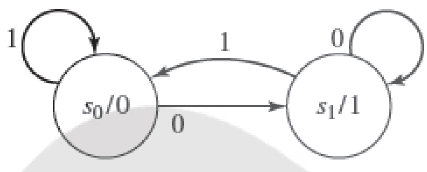
Η έξοδος είναι 101110.

9.



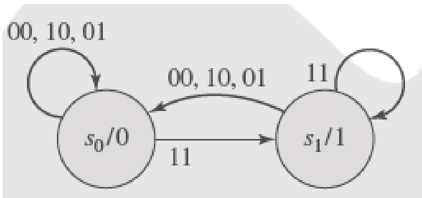
Η έξοδος είναι 0001101.

11. α.



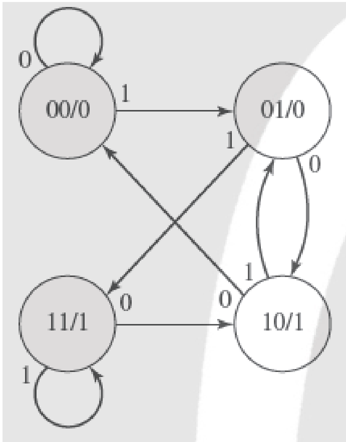
β. 010100.

13. α.



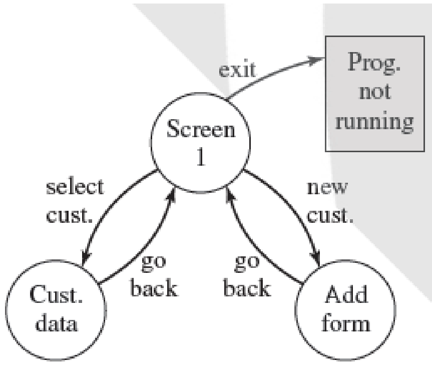
β. 010010.

15. α. Ονομάζουμε κάθε κατάσταση με την ακολουθία των δύο τελευταίων bit εισόδου που διαβάστηκαν.



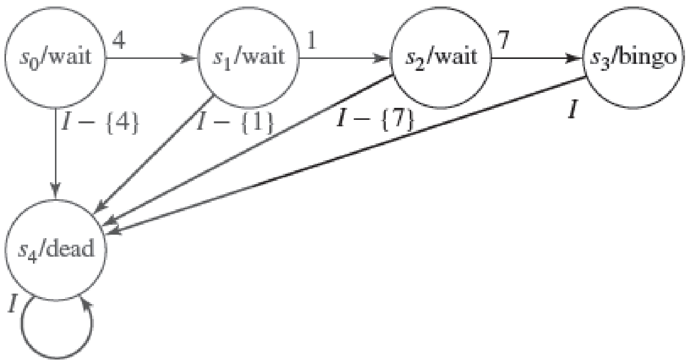
β. Ο χρόνος που απαιτείται για να θυμάται μια δοθείσα είσοδο αυξάνεται χωρίς κάποιο φράγμα και τελικά θα ξεπεράσει τον αριθμό των καταστάσεων.

17.



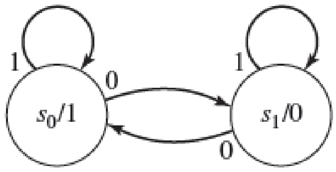
Το πρόγραμμα δεν τρέχει
έξοδος
Οθόνη 1
επιλογή πελάτη, επιστροφή, επιστροφή, νέος πελάτης
Δεδομένα πελάτη, Προσθήκη φόρμας

19.



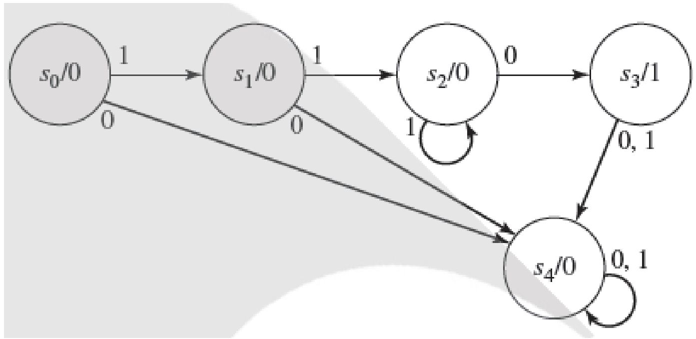
s_0/αναμονή, s_1/αναμονή, s_2/αναμονή, s_3/μπίνγκο, s_4/νεκρό

21. Όχι.
23. Ναι.
25. α.



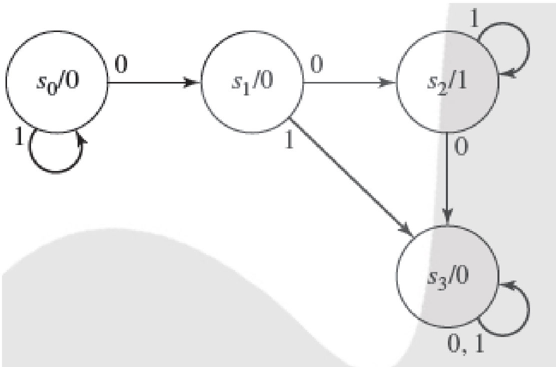
$s_0/1$
$s_1/0$
1
1
0
0

β.



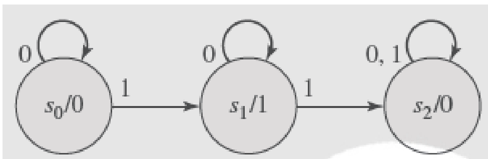
$s_0/0$
$s_1/0$
$s_2/0$
$s_3/1$
$s_4/0$
1
1
0
0
0
1
0, 1
0, 1

γ.



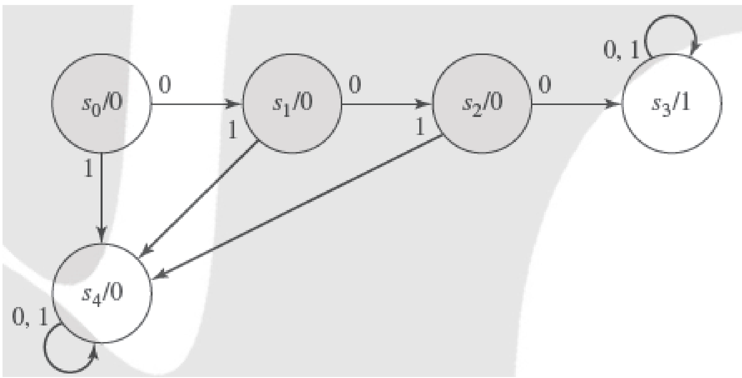
$s_0/0$
$s_1/0$
$s_2/1$
$s_3/0$
0
0
1
1
1
0
0, 1

27. α.



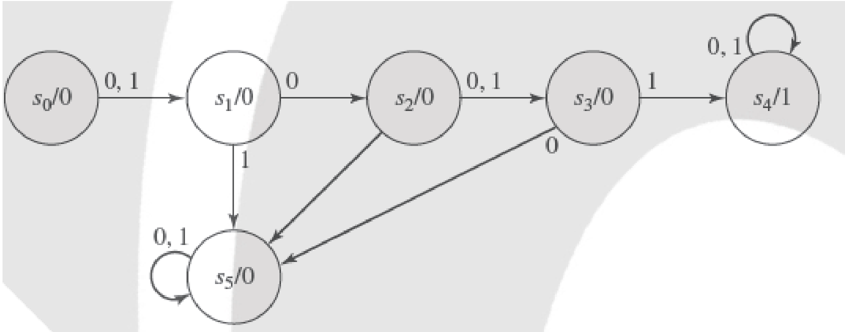
$s_0/0$
$s_1/1$
$s_2/0$
0
0
0, 1
1
1

β.

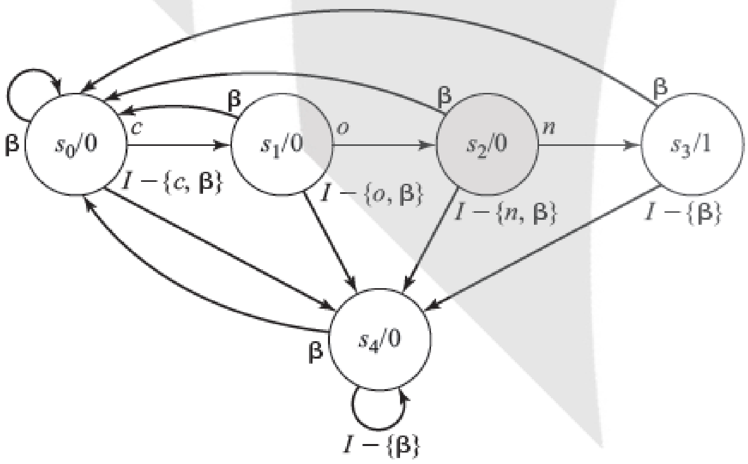


$s_0/0$
$s_1/0$
$s_2/0$
$s_3/1$
$s_4/0$
0
0
0
0, 1
1
1
1
0, 1

γ.



29. Το αντικείμενο είναι η αναγνώριση της συμβολοσειράς βcon.



31. Μόλις η μηχανή επισκεφτεί ξανά μια κατάσταση, η συμπεριφορά της από εκεί και στο εξής θα είναι περιοδική επειδή η είσοδος είναι πάντοτε το 0 και δεν υπάρχει επιλογή μονοπατιών από μία κατάσταση. Ο μέγιστος αριθμός των εισόδων που μπορεί να εμφανιστούν πριν συμβεί αυτό είναι $n-1$ (επίσκεψη όλων των n καταστάσεων πριν ξεκινήσει η επανάληψη). Το μέγιστο μήκος μιας περιόδου είναι n (έξοδος από όλες τις n καταστάσεις, με την τελευταία κατάσταση να επιστρέφει στην s_0).

33. 0^*

35. $01^* \vee (110)^*$

37. $(1 \vee 01)(01)^*$

39. 10^*1

41. $1^* \vee (010)^*$

43. α. $0(0 \vee 1)^*1$ β. $1^*01^*(01^*0)^*1^*$ γ. 100^*1

45. α. Ναι β. Όχι γ. Όχι

47. $dd^*(+ \vee -)dd^*$ όπου το d συμβολίζει ένα οποιοδήποτε ψηφίο.

49. α. $(00)^*$ β. 111^*0 γ. 1^*001^*

51. α. 0^*10^* β. $000(1 \vee 0)^*$ γ. $(1 \vee 0)0(1 \vee 0)1(1 \vee 0)^*$

53. α. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο μήκος της κανονικής έκφρασης. Για το βήμα βάσης, αν $A = \emptyset, \lambda$ ή i, τότε $A^R = \emptyset, \lambda$ ή i. Υποθέτουμε ότι για όλες τις εκφράσεις μήκους $\leq k$, A κανονικό $\rightarrow A^R$ κανονικό. Έστω A μια κανονική έκφραση μήκους $k+1$. Αν $A = BC$, όπου οι B και C είναι κανονικές, τότε οι B^R και C^R είναι κανονικές από την επαγωγική υπόθεση και $A^R = C^R B^R$, οπότε η A^R είναι κανονική. Ομοίως, αν $A = B \vee C$, τότε $A^R = B^R \vee C^R$ (κανονική), και αν $A = B^*$, τότε $A^R = (B^R)^*$ (κανονική).

β. Όχι. Καμία κανονική έκφραση δεν περιγράφει αυτό το σύνολο.

55. beer, beter

57. beter, better, bettter
59. bit, but, beet
61. $b\ t$
63. s_1
65. $A = \{0\},\ B = \{1, 2, 5\},\ C = \{3, 4\},\ D = \{6\}$.

Παρούσα κατάσταση	Επόμενη κατάσταση		Έξοδος
	Παρούσα είσοδος		
	0	**1**	
A	C	D	1
B	C	B	0
C	B	A	1
D	C	B	1

67. $A = \{0\},\ B = \{5\},\ C = \{2\},\ D = \{7, 8\}, E = \{1, 3\}, F = \{4, 6\}$.

Παρούσα κατάσταση	Επόμενη κατάσταση		Έξοδος
	Παρούσα είσοδος		
	0	**1**	
A	E	C	0
B	F	D	0
C	E	F	0
D	D	E	0
E	C	E	1
F	B	F	1

69. $A = \{0\},\ B = \{2\},\ C = \{1, 4\},\ D = \{3\}, E = \{5\}$.

Παρούσα κατάσταση	Επόμενη κατάσταση		Έξοδος
	Παρούσα είσοδος		
	0	**1**	
A	C	D	0
B	E	C	0
C	B	C	1
D	C	B	2
E	C	A	2

71. $A = \{0, 2\},\ B = \{1, 3\},\ C = \{4\}$.

Παρούσα κατάσταση	Επόμενη κατάσταση			Έξοδος
	Παρούσα είσοδος			
	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	
A	B	C	A	1
B	C	A	B	0
C	B	A	A	0

73. $A = \{0\},\ B = \{2, 4\},\ C = \{1, 5\},\ D = \{3\}$.

Παρούσα	Επόμενη κατάσταση	Έξοδος

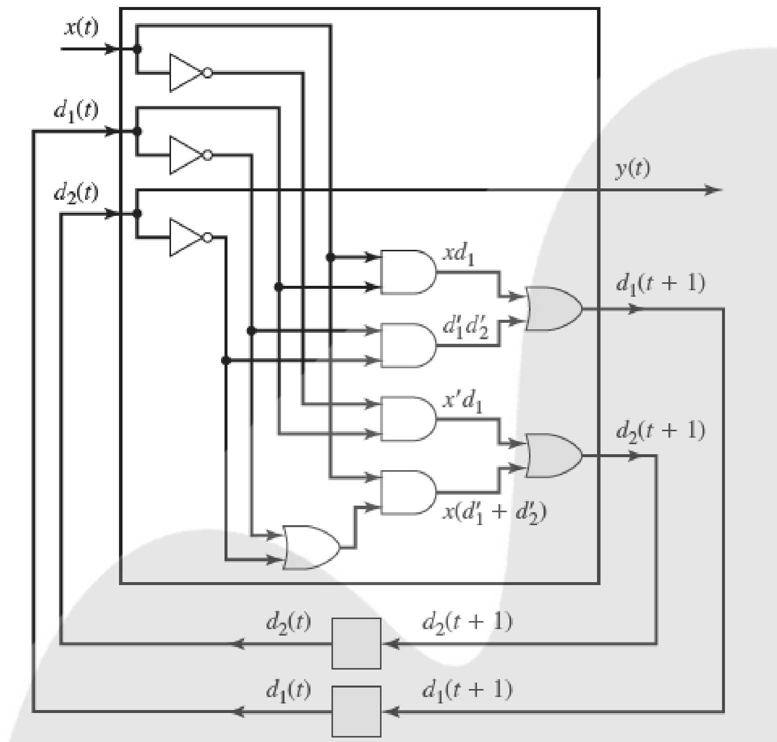
κατάσταση	Παρούσα είσοδος		
	0	**1**	
A	D	A	0
B	C	B	0
C	B	D	1
D	A	B	1

75. Πιθανή απάντηση:

	$\boldsymbol{d_1}$	$\boldsymbol{d_2}$
s_0	0	0
s_1	0	1
s_2	1	0
s_3	1	1

$\boldsymbol{x(t)}$	$\boldsymbol{d_1(t)}$	$\boldsymbol{d_2(t)}$	$\boldsymbol{y(t)}$	$\boldsymbol{d_1(t+1)}$	$\boldsymbol{d_2(t+1)}$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

$$y(t) = d_1'd_2 + d_1d_2 = d_2$$
$$d_1(t+1) = x'd_1'd_2' + xd_1'd_2' + xd_1d_2' + xd_1d_2 = d_1'd_2' + xd_1$$
$$d_2(t+1) = xd_1'd_2' + xd_1'd_2 + x'd_1d_2' + x'd_1d_2 = x(d_1' + d_2') + x'd_1$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.4

1. α. τερματίζει με τελική ταινία

$\cdots$	b	0	0	0	0	0	b	$\cdots$

β. δεν αλλάζει την ταινία και μετακινείται για πάντα προς τα αριστερά.

3. Μία απάντηση: Η κατάσταση 2 είναι μια τελική κατάσταση.

$(0, b, b, 2, R)$ κενή ταινία ή δεν υπάρχουν άλλα ψηφία 1, πήγαινε στην τελική κατάσταση.
$(0, 1, 1, 1, R)$ έχει διαβάσει περιττό αριθμό ψηφίων 1.
$(1, 1, 1, 0, R)$ έχει διαβάσει άρτιο αριθμό ψηφίων 1.

5. Μία απάντηση: Η κατάσταση 3 είναι μια τελική κατάσταση.

$(0, 0, 0, 0, R)$ περνάει πάνω από τα ψηφία 0 στο πρώτο 1.
$(0, 1, 1, 1, R)$
$(1, 0, 0, 1, R)$ περνάει πάνω από τα ψηφία 0 στο δεύτερο 1.
$(1, 1, 1, 2, R)$
$(2, b, b, 3, R)$ τέλος της συμβολοσειράς, τερματίζει και αποδέχεται.

7. Μία απάντηση: Η κατάσταση 9 είναι μια τελική κατάσταση.

$(0, b, b, 9, R)$ αποδέχεται την κενή ταινία.
$(0, 0, 0, 0, R)$ βρίσκει το πρώτο ψηφίο 1, το σημειώνει με X.
$(0, 1, X, 1, R)$
$(1, 1, 1, 1, R)$ ψάχνει προς τα δεξιά για ψηφία 2.
$(1, Y, Y, 1, R)$
$(1, 2, Y, 3, R)$ ζευγάρι ψηφίων 2, σημειώνει με Y.
$(3, 2, Y, 4, L)$
$(4, Y, Y, 4, L)$
$(4, X, X, 4, L)$
$(4, 1, 1, 4, L)$ ψάχνει προς τα αριστερά για 0.
$(4, Z, Z, 4, L)$
$(4, 0, Z, 5, L)$ ζευγάρι ψηφίων 0, σημειώνει με Z.
$(5, 0, Z, 6, R)$
$(6, Z, Z, 6, R)$
$(6, X, X, 6, R)$ περνάει δεξιά στο επόμενο ψηφίο 1.
$(6, 1, X, 1, R)$
$(6, Y, Y, 7, R)$ δεν υπάρχουν άλλα ψηφία 1.
$(7, Y, Y, 7, R)$ δεν υπάρχουν άλλα ψηφία 2.
$(7, b, b, 8, L)$
$(8, Y, Y, 8, L)$
$(8, X, X, 8, L)$ δεν υπάρχουν άλλα ψηφία 0, τερματίζει και αποδέχεται.
$(8, Z, Z, 8, L)$
$(8, b, b, 9, L)$

9. Μία απάντηση: Η κατάσταση 8 είναι μια τελική κατάσταση.

$(0, 0, b, 1, R)$ διαβάζει το 0 στα αριστερά του w_1
$(1, 0, 0, 1, R)$
$(1, 1, 1, 1, R)$ μετακινείται δεξιά στο *
$(1, *, *, 2, R)$
$(2, X, X, 2, R)$ περνάει από τα X

$(2,1,1,8,R)$ μη μηδενικό στα αριστερά του w_2, τερματίζει και αποδέχεται.
$(2,b,b,8,R)$

$(2,0,X,3,L)$ τα αριστερά σύμβολα ταιριάζουν

$(3,X,X,3,L)$ μετακινείται αριστερά στο *
$(3,*,*,4,L)$

$(4,1,1,4,L)$
$(4,0,0,4,L)$ βρίσκει το σύμβολο που είναι τέρμα αριστερά
$(4,b,b,0,R)$

$(0,1,b,5,R)$ διαβάζει το 1 στα αριστερά του w_1

$(5,0,0,5,R)$
$(5,1,1,5,R)$ μετακινείται δεξιά στο *
$(5,*,*,6,R)$

$(6,X,X,6,R)$ περνάει πάνω από τα X

$(6,0,0,8,R)$ δεν υπάρχει κάτι στα αριστερά του w_2, τερματίζει και αποδέχεται
$(6,b,b,8,R)$

$(6,1,X,3,L)$ τα αριστερά σύμβολα ταιριάζουν

$(0,*,*,7,R)$ η λέξη στα αριστερά του * είναι κενή

$(7,X,X,7,R)$
$(7,0,0,8,R)$ η λέξη στα δεξιά του * είναι κενή, τερματίζει και αποδέχεται
$(7,1,1,8,R)$

$(0,b,b,0,R)$ το w_1 είναι αρχικά κενό

11. $(0,0,1,0,R)$ αλλάζει το 0 σε 1
$(0,1,0,0,R)$ αλλάζει το 1 σε 0

13. $(0,1,1,1,R)$ περνάει το κεντρικό σημείο
$(1,0,0,1,R)$ προσθέτει ένα ψηφίο 0 στο δεξί άκρο
$(1,b,0,2,L)$

$(2,0,0,2,L)$
$(2,1,1,2,L)$ προσθέτει ένα ψηφίο 0 στο αριστερό άκρο
$(2,b,0,0,R)$

$(0,0,0,0,R)$ επιστρέφει στο κεντρικό σημείο

15. Η γενική ιδέα είναι να μειώσουμε τον δυαδικό αριθμό κατά 1. Με κάθε μείωση, προσθέτουμε ένα ψηφίο 1 στη συμβολοσειρά των ψηφίων 1 που κατασκευάζεται. [1]

$(0,1,1,0,R)$
$(0,0,0,0,R)$ βρίσκει το ψηφίο χαμηλότερης τάξης
$(0,b,b,1,L)$

$(1,1,0,2,R)$ αν το ψηφίο χαμηλότερης τάξης είναι ίσο με 1, τότε μειώνει

$(2,0,0,2,R)$
$(2,1,1,2,R)$ βρίσκει το τέλος της αρχικής συμβολοσειράς
$(2,b,b,3,R)$

$(3,1,1,3,R)$ βρίσκει το δεξί άκρο της νέας συμβολοσειράς

$(3,b,1,4,L)$ γράφει το ψηφίο 1 στο τέλος της νέας συμβολοσειράς

$(4,1,1,4,L)$ επιστρέφει στην αρχική συμβολοσειρά
$(4,b,b,1,L)$

[1] Τις ευχαριστίες μου στην Alicia Kime του Fairmont State College και τον φοιτητή της Tim Holmes για αυτή τη λύση.

αν το ψηφίο χαμηλότερης τάξης είναι ίσο με 0, αλλάζει σε 1 και ψάχνει

$(1, 0, 1, 5, L)$ στα αριστερά για ακόμα ένα ψηφίο 1 ώστε να μειώσει
$(5, 0, 1, 5, L)$ αυξάνει τα ψηφία 0 στα αριστερά
$(5, b, b, 8, R)$ μόλις έχει αυξηθεί το τελευταίο εναπομείναν 0, εκκαθάριση
$(5, 1, 0, 6, L)$ βρήκε ένα ψηφίο 0 να μειώσει
$(6, 1, 1, 2, R)$ προετοιμασία για μετακίνηση στο τέλος της αρχικής συμβολοσειράς
$(6, 0, 0, 2, R)$
$(6, b, b, 7, R)$ το ψηφίο 1 που μόλις μειώθηκε ήταν το ψηφίο χαμηλότερης τάξης
$(7, 0, b, 2, R)$ αδειάζει το πρώτο ψηφίο 0
$(8, 1, b, 9, L)$ εκκαθαρίζει και τερματίζει

17.

$$f(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} n_2 + 1 & \text{αν } n_2 > 0 \\ \text{δεν ορίζεται} & \text{αν } n_2 = 0 \end{cases}$$

19. $(0, 1, 1, 1, R)$ $n = 0$, προσθέτει 1 και τερματίζει
$(1, b, 1, 4, R)$
$(1, 1, 1, 2, R)$ $n = 1$, προσθέτει ένα επιπλέον 1 και τερματίζει
$(2, b, 1, 4, R)$
$(2, 1, 1, 3, R)$
$(3, 1, b, 3, R)$ $n > 2$, διαγράφει τα επιπλέον 1 και τερματίζει
$(3, b, b, 4, R)$

21. Μία απάντηση:
$(0, 1, 1, 1, R)$ $n = 0,\ 2 \cdot 0 = 0$
$(1, b, b, 8, R)$
$(1, 1, 1, 2, R)$
$(2, 1, 1, 2, R)$ $n > 0$, βρίσκει το τέλος του $\overline{n}$
$(2, b, b, 3, L)$
$(3, 1, X, 4, R)$
$(4, X, X, 4, R)$ αλλάζει το 1 σε X, προσθέτει 1 στο δεξί άκρο της συμβολοσειράς
$(4, 1, 1, 4, R)$
$(4, b, 1, 5, L)$
$(5, 1, 1, 5, L)$
$(5, X, X, 6, L)$ πηγαίνει αριστερά στο επόμενο ψηφίο 1 του $\overline{n}$
$(6, X, X, 6, L)$
$(6, 1, X, 4, R)$
$(6, b, b, 7, R)$ Το $\overline{n}$ διπλασιάζεται, αλλάζει τα X σε 1
$(7, X, 1, 7, R)$
$(7, 1, 1, 7, R)$
$(7, b, b, 8, L)$ βρίσκει το δεξί άκρο, διαγράφει τα επιπλέον 1, τερματίζει
$(8, 1, b, 9, L)$

23. Μία απάντηση:
$(0, 1, b, 1, R)$ διαγράφει ένα επιπλέον ψηφίο 1
$(1, *, b, 3, R)$ $n_1 = 0$
$(1, 1, b, 2, R)$
$(2, 1, 1, 2, R)$ $n_1 > 0$, αντικαθιστά το * με το τέρμα αριστερά ψηφίο 1 του $\overline{n}_1$, τερματίζει
$(2, *, 1, 3, R)$

25. Μία απάντηση:

$(0,1,1,0,R)$	
$(0,*,*,0,R)$	μετακινείται στο δεξί άκρο των ψηφίων 1 του n_2
$(0,b,b,1,L)$	
$(0,X,X,1,L)$	
$(1,1,X,2,L)$	X είναι το τέρμα δεξιά ψηφίο 1 του n_2
$(2,1,1,2,L)$	
$(2,*,*,2,L)$	
$(2,b,b,3,R)$	μετακινείται στο αριστερό άκρο των ψηφίων 1 του n_1, X είναι το τέρμα αριστερά ψηφίο 1
$(2,X,X,3,R)$	
$(3,1,X,0,R)$	
$(3,*,X,4,L)$	$n_1 < n_2$
$(4,X,X,4,L)$	
$(4,b,1,5,R)$	
$(5,X,b,5,R)$	γράφει 0 στην ταινία και τερματίζει
$(5,1,b,5,R)$	
$(5,b,b,9,R)$	
$(1,*,*,6,R)$	όλο το n_2 έχει χρησιμοποιηθεί, τώρα γράφει το $n_1 - n_2$ στην ταινία
$(6,X,X,6,R)$	
$(6,b,b,7,L)$	διαγράφει το n_2
$(7,X,b,7,L)$	
$(7,*,1,8,L)$	
$(8,1,1,8,L)$	εκκαθαρίζει το $n_1 - n_2$ και τερματίζει
$(8,X,b,8,L)$	
$(8,b,b,9,R)$	

27. επίκληση της T_1, επίκληση της T_2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9.5

1. $L(G) = \{\lambda, a\}$. Η γραμματική είναι τύπου 0.

3. $L(G) = 0(10)^*$. Η γραμματική είναι κανονική.

5. $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{a, S\}, V_T = \{a\}$ και $P = \{S \to \lambda, S \to a\}$.

7. Η γραμματική της Άσκησης 3 είναι ήδη κανονική.

9. $L(G) = (ab)^*$.

11. $L(G) = aa^*bb^*$. Η G είναι γραμματική με συμφραζόμενα. Ένα παράδειγμα κανονικής γραμματικής που δημιουργεί την $L(G)$ είναι η $G' = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{a, b, A, B, S\}$, $V_T = \{a, b\}$ και $P = \{S \to aA, S \to aB, A \to aA, A \to aB, B \to bB, B \to b\}$.

13. α. $< S >::= 0 < A > |1 < A >,\ < A >::= 1 < B >< B >,\ < B >::= 01|11$.
β. $< S >::= 0|0 < A >, < A >::= 1 < B >, < B >::= 0 < A > |0$.
γ. $< S >::= 0 < S > |11 < A >, < A >::= 1 < A > |1$.

15. α. 1*1(00)*
β. $S \to 1,\ S \to 1S,\ S \to 0A,\ A \to 0,\ A \to 0B,\ B \to 0A$.

17. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{(\,,), S\}, V_T = \{(\,,)\}$ και $P = \{S \to \lambda,\ S \to (S)S\}$.

19. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{a, b, A, B, S\}, V_T = \{a, b\}$ και $P = \{S \to \lambda,\ S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to a,\ S \to b\}$.

21. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{0, 1, A, B, S\}, V_T = \{0, 1\}$ και $P = \{S \to 1A,\ A \to 1,\ A \to 1B,\ B \to 0,\ B \to 1,\ B \to 0B,\ B \to 1B\}$.

23. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{1, S\}, V_T = \{1\}$ και $P = \{S \to \lambda,\ S \to 11S\}$.

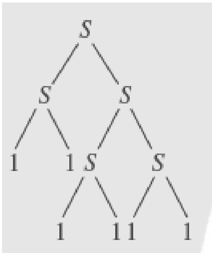
25. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{0, 1, S\}, V_T = \{0, 1\}$ και $P = \{S \to \lambda,\ S \to A,\ A \to 01,\ A \to 0S1\}$.

27. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{0, 1, S\}, V_T = \{0, 1\}$ και $P = \{S \to SS,\ S \to 01,\ S \to 10,\ S \to 0S1,\ S \to 1S0\}$.

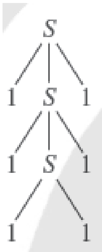
29. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{0, S, A, B, X\}, V_T = \{0\}$ και $P = \{S \to A0B, A0 \to A00X,\ X0 \to 00X,\ XB \to B,\ A \to \lambda,\ B \to \lambda\}$.

31. Για παράδειγμα, $G = (V, V_T, S, P)$ όπου $V = \{0, 1, S, S_1, A, B, M\}, V_T = \{0, 1\}$ και $P = \{S \to \lambda, S \to 0S_1A,\ S \to 1S_1B,\ S_1 \to 0S_1A,\ S_1 \to 1S_1B,\ S_1 \to M,\ MA \to M0,\ MB \to M1,\ M \to \lambda,\ 0A \to A0,\ 0B \to B0,\ 1A \to A1,\ 1B \to B1\}$.

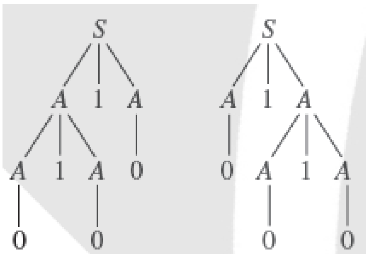
33. α.



β.



35.



37. Το σύνολο των παραγωγών για την G' σχηματίζεται από το σύνολο των παραγωγών για την G ως εξής: Για A, B μη τερματικές λέξεις, οποτεδήποτε $A \overset{*}{\Rightarrow} B$ στην G και η $B \to a$ είναι μια παραγωγή στην G με $|a| \geq 2$, προσθέτουμε την παραγωγή $A \to a$ στο σύνολο, έπειτα αφαιρούμε όλες τις παραγωγές της μορφής $A \to B$. Για οποιεσδήποτε παραγωγές της μορφής $A \to a$, $a \in V_T$, προσθέτουμε στο σύνολο των παραγωγών εκείνες που προκύπτουν αντικαθιστώντας οποιοδήποτε A στα δεξιά μιας υπάρχουσας παραγωγής με a, έπειτα αφαιρούμε όλες τις παραγωγές της μορφής $A \to a$. Αφαιρούμε την $S \to \lambda$. Όλες οι παραγωγές που απομένουν έχουν δεξιά μέλη με μήκος ≥ 2 και

$L(G') \subseteq L(G)$. Μόνο η λ και ένας πεπερασμένος αριθμός λέξεων μήκους 1 μπορεί να έχουν αφαιρεθεί, οπότε το $L(G) - L(G')$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο.